Spezielle symplektische Zusammenhänge

Wissenschaftliche Arbeit zur Erlangung
des akademischen Grades

„Diplom–Mathematiker“

am Institut für Mathematik und Informatik
der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

vorgelegt von

Paul Rosenthal

geboren am 13. November 1980
in Wolgast

Gutachter

PD Dr. habil. Lutz Habermann

PD Dr. habil. Katharina Habermann

Greifswald, 12. Mai 2005

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Fast jeder Student, der sich in seinem Studium mit Differentialgeometrie beschäftigt, kennt den Begriff des Zusammenhangs (auch kovariante Ableitung genannt). Als ich in einer Vorlesung erfuhr, dass zu jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit genau ein metrischer und torsionsfreier Zusammenhang existiert, war ich darüber kaum verwundert. Mehr noch erging es mir so, dass die restlichen Zusammenhänge auf der Mannigfaltigkeit bald in Vergessenheit gerieten.

Beschäftigt man sich dann mit symplektischen Mannigfaltigkeiten, so ergibt sich eine andere Situation. Die Forderung an einen symplektischen Zusammenhang verschwindende Torsion zu haben, führt keinesfalls zu einem ausgezeichneten Zusammenhang. Vielmehr bilden die torsionsfreien symplektischen Zusammenhänge einen Raum unendlicher Dimension. Will man hier eine Auswahl treffen, so müssen sinnvolle weitere Forderungen gestellt werden. Diese erhält man zum Beispiel aus geeigneten Variationsprinzipien oder durch Betrachtung von zusätzlichen Gebilden auf der Mannigfaltigkeit.

In [7] zeichnen Bourgeois und Cahen torsionsfreie symplektische Zusammenhänge mittels Yang-Mills-artiger Funktionale aus. Diese werden dort als „preferred symplectic connections“ bezeichnet. Eine hinreichende Bedingung für diese Zusammenhänge erhalten Cahen, Gutt und Rawnsley in [8] mit einer anderen Herangehensweise. Die dort betrachtete weitere Bedingung der Parallelität des zugehörigen Ricci-Tensors schränkt die Vielfalt der Zusammenhänge nochmals ein. Weiterführende Betrachtungen zu diesen Zusammenhängen finden sich in [9].

Cahen und Schwachhöfer vereinheitlichen in [10] die bekannten Resultate unter dem Begriff des speziellen symplektischen Zusammenhangs. Wir wollen diesen Begriff jedoch nicht so eng fassen. Vielmehr zielt der Titel der vorliegenden Arbeit darauf ab, zahlreiche Zusammenhänge zu betrachten, die durch bestimmte Eigenschaften ausgezeichnet und deswegen speziell sind. Des Weiteren ist nicht klar, ob die Forderung der Torsionsfreiheit, welche von vielen Autoren gestellt wird, den Raum der symplektischen Zusammenhänge zu sehr einschränkt, um ausgezeichnete zu finden. Aus diesem Grund werden wir unsere Überlegungen nicht a priori einschränken und beliebige symplektische Zusammenhänge zulassen.

Einen anderen Ansatz zum Erlangen von speziellen symplektischen Zusammenhängen erhält man aus der Betrachtung des Raumes der verträglichen fast-komplexen Strukturen. Mit einer solchen Struktur ist die symplektische Mannigfaltigkeit dann fast-Kählersch und die zahlreichen Arbeiten über Hermitesche Zusammenhänge, wie zum Beispiel [14], liefern grundlegend neue Gedanken. Wegen der Geschlossenheit der Kähler-Form fallen zahlreiche spezielle Hermitesche Zusammenhänge, wie etwa der Chern- oder der Bismut-Zusammenhang, zu einem kanonischen zusammen. Wir können diesen Zusammenhang zu jeder verträglichen fast-komplexen Struktur fixieren und müssen nur noch nach einer ausgezeichneten Struktur suchen (vgl. auch [5]).

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in vier Kapitel, von denen das erste hauptsächlich der Klärung der verwendeten Begriffe dient. Außerdem werden grundsätzliche Eigenschaften und Resultate angegeben und zum Teil bewiesen.

Aus zwei verschiedenen Teilen besteht das zweite Kapitel. In Abschnitt 2.1 verfolgen wir einen aus der String-Theorie stammenden Ansatz zur Auszeichnung von Zusammenhängen. Dort werden Hermitesche Zusammenhänge betrachtet, deren Torsion, als $(3, 0)$-Tensorfeld aufgefasst, total schiefsymmetrisch ist und nicht verschwindet [13]. Diese Gedanken übertragen wir auf symplektische Zusammenhänge. Der zweite Teil des Kapitels dient dann dazu die verschiedenen in der Literatur definierten Ricci-Tensoren und Skalarkrümmungen anzugeben und zu vergleichen.

In Kapitel 3 greifen wir die Vorgehensweise von Bourgeois und Cahen auf. Dazu betrachten wir ein beliebiges symplektisches oder Riemannsches Vektorbündel. Die Funktionale aus [7] verallgemeinern wir dann auf Zusammenhänge in dem Vektorbündel. Wir geben die Euler-Lagrange-Gleichungen der Funktionale an und bemerken, dass die Überlegungen zu symplektischen Zusammenhängen nun Spezialfälle sind.

Das Anliegen des vierten Kapitels ist die genauere Beschreibung des Raumes der verträglichen fast-komplexen Strukturen und des Raumes der Hermiteschen Zusammenhänge einer symplektischen Mannigfaltigkeit. Mittels der gewonnenen Erkenntnisse werden dann Funktionale auf dem Raum der Hermiteschen Zusammenhänge betrachtet.

Insgesamt werden in der vorliegenden Arbeit verschiedene Ansätze und Begriffe zum Auszeichnen von symplektischen Zusammenhängen vorgestellt, aus anderen Blickwinkeln betrachtet und zum Teil verallgemeinert. Daraus erhalten wir Bestimmungsgleichungen für kritische Punkte von Funktionalen, aber auch die Einsicht, dass viele mögliche Funktionale keine interessanten kritischen Punkte haben. Ein zukünftiges Ziel wäre nun das Finden von Lösungen der aufgestellten Euler-Lagrange-Gleichungen. Die Arbeiten von Bourgeois, Cahen, Gutt, Rawnsley und Schwachhöfer ([7]–[10]) liefern dazu schon wichtige Resultate. Eine Weiterführung der in dieser Arbeit angestellten Untersuchungen wäre außerdem das Studium von Funktionalen, die mittels kanonischer Hermitescher Zusammenhänge konstruiert werden.

Abschließend möchte ich Katharina und Lutz Habermann für die hervorragende Betreuung nicht nur während der Diplomphase, sondern auch während der gesamten Studienzeit danken. Des Weiteren bin ich meiner Familie für die ideelle und materielle Unterstützung dankbar. Für zahlreiche Diskussionen und Anregungen gilt mein Dank auch Steffen Rudnick und vielen Mitarbeitern des Institutes für Mathematik und Informatik.

Kapitel 1

Zusammenhänge auf Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel sollen die wesentlichen Begriffe und Resultate über Zusammenhänge auf Mannigfaltigkeiten zusammengetragen werden. Für fehlende Beweise und weitere Details verweisen wir auf [4], [6], [18], [20] und [21].

Hier und in den folgenden Kapiteln wird M als differenzierbare geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt. Der Mannigfaltigkeit M zugeordnet sind das Tangentialbündel TM und das Kotangentialbündel T^*M. Den Raum der reellwertigen, beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf M bezeichnen wir mit $C^\infty(M)$. Alle hier betrachteten Funktionen seien Elemente von $C^\infty(M)$.

Sei E ein beliebiges Vektorbündel über M und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann bezeichnen wir den Vektorraum der k-Formen auf M mit Werten in E mit $\Omega^k(M, E)$. Zur Vereinfachung setzen wir $\Omega^k(M) := \Omega^k(M, M \times \mathbb{R})$. Mit $\Gamma(E)$ bezeichnen wir die Menge der glatten Schnitte in E, also $\Gamma(E) := \Omega^0(M, E)$. Damit ist $\Gamma(TM)$ der Raum der glatten Vektorfelder auf M. Später benötigen wir noch den Begriff des Endomorphismenbündels $\mathrm{End}\,(E)$ von E, welches wieder ein Vektorbündel über M ist.

1.1 Allgemeines

Definition 1.1.1 *Ein Zusammenhang in E ist eine Abbildung*

$$\nabla : (X, \xi) \in \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \mapsto \nabla_X \xi \in \Gamma(E)$$

derart, dass für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\xi, \chi \in \Gamma(E)$ und $f, h \in C^\infty(M)$ die folgenden Beziehungen gelten.

1. $\nabla_{fX+hY}\xi = f\nabla_X\xi + h\nabla_Y\xi$
2. $\nabla_X(\xi + \chi) = \nabla_X\xi + \nabla_X\chi$
3. $\nabla_X(f\xi) = X(f)\xi + f\nabla_X\xi$

Den Raum der Zusammenhänge in E werden wir im Folgenden mit $\mathcal{C}(E)$ bezeichnen. Zusammenhänge im Tangentialbündel TM bezeichnet man auch als Zusammenhänge auf M.

Satz 1.1.2 *Der Raum $\mathcal{C}(E)$ der Zusammenhänge in E ist ein affiner Raum über dem Vektorraum $\Omega^1(M, \mathrm{End}\,(E))$.*

Beweis. Seien $\nabla^1, \nabla^2 \in \mathcal{C}(E)$. Dann gilt

$$\left(\nabla^1_{fX+hY} - \nabla^2_{fX+hY}\right)\xi = f\left(\nabla^1_X - \nabla^2_X\right)\xi + h\left(\nabla^1_Y - \nabla^2_Y\right)\xi\ ,$$

$$\left(\nabla^1_X - \nabla^2_X\right)(\xi + \chi) = \left(\nabla^1_X - \nabla^2_X\right)\xi + \left(\nabla^1_X - \nabla^2_X\right)\chi$$

und

$$\begin{aligned}\left(\nabla^1_X - \nabla^2_X\right)(f\xi) &= X(f)\xi + f\nabla^1_X\xi - X(f)\xi - f\nabla^2_X\xi \\ &= f\left(\nabla^1_X - \nabla^2_X\right)\xi\ .\end{aligned}$$

Es folgt somit $\nabla^1 - \nabla^2 \in \Omega^1(M, \mathrm{End}\,(E))$. Ist nun umgekehrt $\nabla \in \mathcal{C}(E)$ und $\zeta \in \Omega^1(M, \mathrm{End}\,(E))$, so erfüllt $\nabla + \zeta$ alle Bedingungen an einen Zusammenhang und die Behauptung ist bewiesen. □

Mit Hilfe eines Zusammenhangs ∇ können wir den Begriff des äußeren Differentials $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ verallgemeinern.

Definition 1.1.3 *Sei $\nabla \in \mathcal{C}(E)$ ein Zusammenhang. Das zu ∇ assoziierte Differential ist die lineare Abbildung $\mathrm{d}^\nabla : \Omega^k(M, E) \to \Omega^{k+1}(M, E)$, welche durch*

$$\mathrm{d}^\nabla(\xi \otimes \varphi) := \nabla\xi \wedge \varphi + \xi \otimes \mathrm{d}\varphi \quad \textit{für} \quad \xi \in \Gamma(E),\ \varphi \in \Omega^k(M)$$

definiert ist.

Bemerkung 1.1.4 Sei $(X_1, \dots, X_m)$ ein Reper auf M, das heißt ein lokaler Schnitt des Reperbündels von M, und $(X^1, \dots, X^m)$ das dazu duale Reper. Dann lässt sich d^∇ schreiben als

$$\mathrm{d}^\nabla(\xi \otimes \varphi) = \sum_{i=1}^m \nabla_{X_i}\xi \otimes X^i \wedge \varphi + \xi \otimes \mathrm{d}\varphi\ .$$

□

Für das Differential einer reellen 1-Form $\varphi \in \Omega^1(M)$ gilt bekanntlich

$$(\mathrm{d}\varphi)(X, Y) = X(\varphi(Y)) - Y(\varphi(X)) - \varphi([X, Y]) \quad \text{für alle} \quad X, Y \in \Gamma(TM)\ .$$

Diese Formel können wir für d^∇ verallgemeinern.

Lemma 1.1.5 *Sei $\mu \in \Omega^1(M,E)$. Dann gilt*

$$\left(\mathrm{d}^\nabla \mu\right)(X,Y) = \nabla_X(\mu(Y)) - \nabla_Y(\mu(X)) - \mu([X,Y])$$

für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Beweis. Sei o.B.d.A. $\mu = \xi \otimes \varphi$ mit $\xi \in \Gamma(E)$ und $\varphi \in \Omega^1(M)$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{d}^\nabla \mu\right)(X,Y) &= (\nabla\xi \wedge \varphi)(X,Y) + (\xi \otimes \mathrm{d}\varphi)(X,Y)\\ &= \nabla_X\xi \cdot \varphi(Y) - \nabla_Y\xi \cdot \varphi(X) + \xi \cdot \mathrm{d}\varphi(X,Y)\\ &= \nabla_X\xi \cdot \varphi(Y) - \nabla_Y\xi \cdot \varphi(X) + \xi \cdot X(\varphi(Y))\\ &\quad - \xi \cdot Y(\varphi(X)) - \xi \cdot \varphi([X,Y])\\ &= \nabla_X(\mu(Y)) - \nabla_Y(\mu(X)) - \mu([X,Y])\end{aligned}$$

für $X, Y \in \Gamma(TM)$. □

Definition 1.1.6 *Die Krümmung von $\nabla \in \mathcal{C}(E)$ ist die durch*

$$R^\nabla(X,Y)\xi := \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi$$

für $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $\xi \in \Gamma(E)$ definierte Form $R^\nabla \in \Omega^2(M, \mathrm{End}\,(E))$.

Zum Verständnis der weiteren Überlegungen erinnern wir daran, dass jeder Zusammenhang $\nabla \in \mathcal{C}(E)$ einen Zusammenhang in $\mathrm{End}\,(E)$ induziert. Dieser ist gegeben durch

$$(\nabla_X L)\,\xi := \nabla_X(L\xi) - L\,(\nabla_X\xi)$$

für $L \in \Gamma(\mathrm{End}\,(E))$ und $\xi \in \Gamma(E)$.

Satz 1.1.7 *Für alle $\nabla \in \mathcal{C}(E)$ gilt $\mathrm{d}^\nabla R^\nabla = 0$.* □

Zu einer glatten Kurve von Zusammenhängen ∇^t wollen wir die Ableitung der Kurve der zugehörigen Krümmungen R^{∇^t} berechnen.

Lemma 1.1.8 *Sei ∇^t eine Kurve in $\mathcal{C}(E)$ mit*

$$\nabla^0 = \nabla \quad \text{und} \quad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla^t\right|_{t=0} = \zeta \in \Omega^1(M, \mathrm{End}\,(E))\,.$$

Dann gilt

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R^{\nabla^t}\right|_{t=0} = \mathrm{d}^\nabla\zeta\,.$$

Beweis. Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $\xi \in \Gamma(E)$. Dann haben wir mittels Lemma 1.1.5

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R^{\nabla^t}(X,Y)\xi\right|_{t=0} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\nabla^t_X\nabla^t_Y\xi - \nabla^t_Y\nabla^t_X\xi - \nabla^t_{[X,Y]}\xi\right)\right|_{t=0}\\ &= \zeta(X)\nabla_Y\xi + \nabla_X(\zeta(Y)\xi) - \zeta(Y)\nabla_X\xi - \nabla_Y(\zeta(X)\xi)\\ &\quad - \zeta([X,Y])\xi\\ &= (\nabla_X(\zeta(Y)))\,\xi - (\nabla_Y(\zeta(X)))\,\xi - \zeta([X,Y])\xi\\ &= \left(\mathrm{d}^\nabla\zeta\right)(X,Y)\xi\,.\end{aligned}$$

□

Seien $r, s \in \mathbb{N}_0$. Einen glatten Schnitt des Vektorbündels

$$\mathcal{T}^{(r,s)}(M) := \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{s\text{-mal}}$$

bezeichnen wir als (r, s)-Tensorfeld.

In den weiteren Betrachtungen beschränken wir uns auf Zusammenhänge ∇ auf M. Diese induzieren Zusammenhänge in $\mathcal{T}^{(r,s)}(M)$, welche wir wieder mit ∇ bezeichnen werden. Mit $X, Y_1, \ldots, Y_r \in \Gamma(TM)$ haben wir insbesondere

$$(\nabla_X a)(Y_1, \ldots, Y_r) := X\left(a(Y_1, \ldots, Y_r)\right) - \sum_{i=1}^{r} a(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_r)$$

für $a \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(r,0)}(M)\right)$ und

$$(\nabla_X b)(Y_1, \ldots, Y_r) := \nabla_X\left(b(Y_1, \ldots, Y_r)\right) - \sum_{i=1}^{r} b(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_r)$$

für $b \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(r,1)}(M)\right)$.

Definition 1.1.9 *Die Torsion eines Zusammenhangs ∇ auf M ist die durch*

$$T^\nabla(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

für $X, Y \in \Gamma(TM)$ definierte Form $T^\nabla \in \Omega^2(M, TM)$. Ein Zusammenhang ∇ mit verschwindender Torsion heißt torsionsfrei.

Zwischen der Torsion eines Zusammenhangs und dem äußeren Differential einer parallelen 2-Form besteht folgende Relation.

Lemma 1.1.10 *Sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$ und $\varphi \in \Omega^2(M)$ mit $\nabla\varphi = 0$. Dann gilt*

$$\mathrm{d}\varphi(X, Y, Z) = \varphi\left(T^\nabla(X, Y), Z\right) + \varphi\left(T^\nabla(Y, Z), X\right) + \varphi\left(T^\nabla(Z, X), Y\right)$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Beweis. Seien $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ und sei $\varphi \in \Omega^2(M)$. Mit $\nabla\varphi = 0$ und der bekannten Formel

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi(X, Y, Z) = {} & X(\varphi(Y, Z)) + Y(\varphi(Z, X)) + Z(\varphi(X, Y)) \\ & - \varphi([X, Y], Z) - \varphi([Y, Z], X) - \varphi([Z, X], Y) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

für das Differential einer 2-Form folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi(X, Y, Z) = {} & \varphi(\nabla_X Y, Z) + \varphi(Y, \nabla_X Z) + \varphi(\nabla_Y Z, X) \\ & + \varphi(Z, \nabla_Y X) + \varphi(\nabla_Z X, Y) + \varphi(X, \nabla_Z Y) \\ & - \varphi([X, Y], Z) - \varphi([Y, Z], X) - \varphi([Z, X], Y) \\ = {} & \varphi\left(T^\nabla(X, Y), Z\right) + \varphi\left(T^\nabla(Y, Z), X\right) + \varphi\left(T^\nabla(Z, X), Y\right) . \end{aligned}$$

□

Den Raum der Zusammenhänge auf M, bezüglich derer $\varphi \in \Omega^2(M)$ parallel ist, bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(TM, \varphi)$. Um diesen Raum noch genauer beschreiben zu können, bezeichne $\mathrm{End}\,(TM, \varphi)$ dasjenige Unterbündel von $\mathrm{End}\,(TM)$, für das $L \in \Gamma(\mathrm{End}\,(TM, \varphi))$ genau dann gilt, wenn

$$\varphi(LX, Y) = -\varphi(X, LY)$$

für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Satz 1.1.11 *Der Raum $\mathcal{C}(TM, \varphi)$ ist ein affiner Raum über dem Vektorraum $\Omega^1(M, \mathrm{End}\,(TM, \varphi))$.*

Beweis. Sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \varphi)$ und $\zeta \in \Omega^1(M, \mathrm{End}\,(TM))$. Dann ist $\nabla + \zeta \in \mathcal{C}(TM)$. Weiter haben wir $\nabla + \zeta \in \mathcal{C}(TM, \varphi)$ genau dann, wenn

$$X(\varphi(Y, Z)) = \varphi(\nabla_X Y, Z) + \varphi(\zeta(X)Y, Z) + \varphi(Y, \nabla_X Z) + \varphi(Y, \zeta(X)Z)$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Dies ist aber wegen $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \varphi)$ äquivalent zu

$$\varphi(\zeta(X)Y, Z) = -\varphi(Y, \zeta(X)Z)$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Die Krümmung und Torsion eines Zusammenhangs stehen in folgender Relation.

Satz 1.1.12 (Bianchi-Identität) *Für jeden Zusammenhang ∇ auf M gilt*

$$\begin{aligned} &R^\nabla(X, Y)Z + R^\nabla(Y, Z)X + R^\nabla(Z, X)Y \\ &= T^\nabla\left(T^\nabla(X, Y), Z\right) + T^\nabla\left(T^\nabla(Y, Z), X\right) + T^\nabla\left(T^\nabla(Z, X), Y\right) \\ &\quad + \left(\nabla_X T^\nabla\right)(Y, Z) + \left(\nabla_Y T^\nabla\right)(Z, X) + \left(\nabla_Z T^\nabla\right)(X, Y) \end{aligned}$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. $\square$

Insbesondere haben wir im Fall eines torsionsfreien Zusammenhangs ∇

$$R^\nabla(X, Y)Z + R^\nabla(Y, Z)X + R^\nabla(Z, X)Y = 0$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

1.2 Metrische Zusammenhänge

In diesem Abschnitt soll M zusätzlich mit einem gewissen $(2, 0)$-Tensorfeld versehen werden. Die Betrachtung von dazu parallelen Zusammenhängen führt dann zu einem ausgezeichneten Zusammenhang.

Definition 1.2.1 *Ein $(2,0)$-Tensorfeld g auf M heißt Riemannsche Metrik, falls g_x für jedes $x \in M$ eine positiv definite und symmetrische Bilinearform ist. Das Paar (M,g) heißt dann Riemannsche Mannigfaltigkeit.*

Eine Riemannsche Metrik existiert auf jeder Mannigfaltigkeit. Zu gegebener Riemannscher Metrik g können wir nun besondere Repere auszeichnen. Ein Reper $(e_1, \dots, e_m)$ mit

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

für alle $i, j = 1, \dots, m$ heißt Orthonormalreper zu g.

Sei in diesem Abschnitt (M,g) als Riemannsche Mannigfaltigkeit vorausgesetzt.

Definition 1.2.2 *Ein Zusammenhang $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$ heißt metrisch, falls $\nabla g = 0$.*

Den Raum der metrischen Zusammenhänge bezeichnen wir im Weiteren mit $\mathcal{C}(TM, g)$. Nach dem folgenden Satz sind die metrischen Zusammenhänge gerade durch ihre Torsion parametrisiert.

Satz 1.2.3 *Zu jedem $T \in \Omega^2(M, TM)$ existiert genau ein metrischer Zusammenhang ∇ mit $T^\nabla = T$. Dieser ist durch*

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_X Y, Z\right) = {} & X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ & + g([X,Y], Z) + g([Z,X], Y) + g([Z,Y], X) \\ & + g(T(X,Y), Z) + g(T(Z,X), Y) + g(T(Z,Y), X) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

für $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ definiert.

Beweis. Seien $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, sei $T \in \Omega^2(M, TM)$ und $\nabla \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(2,1)}(M)\right)$ durch (1.2.1) definiert. Dann haben wir für $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_X(fY), Z\right) &= X(fg(Y,Z)) + fY(g(X,Z)) - Z(fg(X,Y)) \\ &\quad + g(X(f)Y + f[X,Y], Z) + fg([Z,X], Y) \\ &\quad + g(Z(f)Y + f[Z,Y], X) + fg(T(X,Y), Z) \\ &\quad + fg(T(Z,X), Y) + fg(T(Z,Y), X) \\ &= X(f)g(Y,Z) + fX(g(Y,Z)) + fY(g(X,Z)) \\ &\quad - Z(f)g(X,Y) - fZ(g(X,Y)) + g(X(f)Y, Z) \\ &\quad + fg([X,Y], Z) + fg([Z,X], Y) + g(Z(f)Y, X) \\ &\quad + fg([Z,Y], X) + fg(T(X,Y), Z) \\ &\quad + fg(T(Z,X), Y) + fg(T(Z,Y), X) \\ &= 2g(X(f)Y, Z) + 2g\left(f\nabla_X Y, Z\right) \ . \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y \ .$$

Analog rechnet man die weiteren Bedingungen aus Definition 1.1.1 nach und erhält $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$. ∇ ist auch metrisch, denn wir haben

$$
\begin{aligned}
2\left(g\left(\nabla_X Y, Z\right)+g\left(Y, \nabla_X Z\right)\right) = {} & X(g(Y,Z))+Y(g(X,Z))-Z(g(X,Y)) \\
& + X(g(Z,Y))+Z(g(X,Y))-Y(g(X,Z)) \\
& + g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)+g([Z,Y],X) \\
& + g([X,Z],Y)+g([Y,X],Z)+g([Y,Z],X) \\
& + g(T(X,Y),Z)+g(T(Z,X),Y)+g(T(Z,Y),X) \\
& + g(T(X,Z),Y)+g(T(Y,X),Z)+g(T(Y,Z),X) \\
= {} & 2X(g(Y,Z))\ .
\end{aligned}
$$

Für die Torsion des gegebenen Zusammenhangs ∇ ergibt sich nun

$$
\begin{aligned}
2g\left(T^{\nabla}(X,Y),Z\right) &= 2g\left(\nabla_X Y, Z\right)-2g\left(\nabla_Y X, Z\right)-2g\left([X,Y],Z\right) \\
&= X(g(Y,Z))+Y(g(X,Z))-Z(g(X,Y)) \\
&\quad - Y(g(X,Z))-X(g(Y,Z))+Z(g(Y,X)) \\
&\quad + g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)+g([Z,Y],X) \\
&\quad - g([Y,X],Z)-g([Z,Y],X)-g([Z,X],Y) \\
&\quad + g(T(X,Y),Z)+g(T(Z,X),Y)+g(T(Z,Y),X) \\
&\quad - g(T(Y,X),Z)-g(T(Z,Y),X)-g(T(Z,X),Y) \\
&\quad - 2g\left([X,Y],Z\right) \\
&= 2g(T(X,Y),Z)\ .
\end{aligned}
$$

∇ erfüllt somit alle geforderten Bedingungen. Sei umgekehrt $\nabla \in \mathcal{C}(TM,g)$ mit $T^{\nabla} = T$. Dann haben wir

$$
X(g(Y,Z)) = g\left(\nabla_X Y, Z\right)+g\left(Y, \nabla_X Z\right)\ , \tag{1.2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(g(X,Z)) &= g\left(\nabla_Y X, Z\right)+g\left(X, \nabla_Y Z\right) \\
&= g\left(\nabla_X Y, Z\right)-g\left([X,Y],Z\right) \\
&\quad - g\left(T(X,Y),Z\right)+g\left(X,\nabla_Y Z\right)
\end{aligned} \tag{1.2.3}
$$

und

$$
\begin{aligned}
Z(g(X,Y)) &= g\left(\nabla_Z X, Y\right)+g\left(X, \nabla_Z Y\right) \\
&= g\left(\nabla_X Z, Y\right)-g\left([X,Z],Y\right)-g\left(T(X,Z),Y\right) \\
&\quad + g\left(X,\nabla_Y Z\right)-g\left(X,[Y,Z]\right)-g\left(X,T(Y,Z)\right)\ .
\end{aligned} \tag{1.2.4}
$$

Addieren wir nun (1.2.2) zu (1.2.3) und subtrahieren Gleichung (1.2.4), so folgt

$$
\begin{aligned}
& X(g(Y,Z))+Y(g(X,Z))-Z(g(X,Y)) \\
&= 2g\left(\nabla_X Y, Z\right)+g([Y,Z],X)+g([X,Z],Y)-g([X,Y],Z) \\
&\quad + g(T(Y,Z),X)+g(T(X,Z),Y)-g(T(X,Y),Z)\ .
\end{aligned}
$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Definition 1.2.4 *Der metrische Zusammenhang D mit verschwindender Torsion heißt Levi-Civita-Zusammenhang.*

Definition 1.2.5 *Der Riemannsche Krümmungstensor ist das durch*

$$\mathrm{Riem}(X_1, X_2, X_3, X_4) := g\left(R^D(X_1, X_2)X_3, X_4\right)$$

für $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ definierte $(4,0)$-Tensorfeld Riem *auf M.*

Im folgenden Satz werden einige Eigenschaften von Riem angegeben.

Satz 1.2.6 *Für $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ gelten die folgenden Gleichungen.*

1. $\mathrm{Riem}(X_1, X_2, X_3, X_4) = -\mathrm{Riem}(X_2, X_1, X_3, X_4)$
2. $\mathrm{Riem}(X_1, X_2, X_3, X_4) = -\mathrm{Riem}(X_1, X_2, X_4, X_3)$
3. $\mathrm{Riem}(X_1, X_2, X_3, X_4) = \mathrm{Riem}(X_3, X_4, X_1, X_2)$
4. $\mathrm{Riem}(X_1, X_2, X_3, X_4) + \mathrm{Riem}(X_2, X_3, X_1, X_4) + \mathrm{Riem}(X_3, X_1, X_2, X_4) = 0$

$\square$

Wir wollen nun einen wichtigen Operator auf den Formen auf (M, g) definieren. Dazu sei M orientiert, $(e_1, \ldots, e_m)$ ein Orthonormalreper in der gegebenen Orientierung und $(e^1, \ldots, e^m)$ das duale Reper. Für die Volumenform $\mathrm{d\,vol}(M)$ von M haben wir dann

$$\mathrm{d\,vol}(M) = e^1 \wedge \ldots \wedge e^m \,.$$

Wir setzen g auf $\Omega^k(M)$ durch

$$g(\varphi, \psi) := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} \varphi\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\right) \psi\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\right)$$

für $\varphi, \psi \in \Omega^k(M)$ fort.

Definition 1.2.7 *Sei $k \in \{0, \ldots, m\}$. Der durch*

$$\varphi \wedge *_g \psi = g(\varphi, \psi)\mathrm{d\,vol}(M) \quad \textit{für alle} \quad \varphi, \psi \in \Omega^k(M)$$

definierte Operator

$$*_g : \Omega^k(M) \to \Omega^{m-k}(M)$$

heißt Riemannscher Hodge-Operator.

Wir geben einige Eigenschaften des Riemannschen Hodge-Operators $*_g$ an, welche leicht nachgerechnet werden können.

Lemma 1.2.8 *1. Für alle $\varphi \in \Omega^k(M)$ gilt*

$$*_g *_g \varphi = (-1)^{k(m-k)} \varphi \, .$$

2. Es ist

$$g(*_g\varphi_1, *_g\varphi_2) = g(\varphi_1, \varphi_2)$$

für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega^k(M)$.

□

Mit Hilfe von $*_g$ können wir einen weiteren Operator definieren.

Definition 1.2.9 *Der Kodifferentialoperator*

$$\delta^g : \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$$

ist durch

$$\delta^g\varphi := (-1)^{mk+1} *_g \mathrm{d} *_g \varphi$$

für $\varphi \in \Omega^{k+1}(M)$ definiert.

Bemerkung 1.2.10 Der Kodifferentialoperator $\delta^g : \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$ ist der zu $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ formal L^2-adjungierte Operator. Das heißt, für alle $\psi \in \Omega^{k+1}(M)$ und $\varphi \in \Omega^k(M)$ gilt

$$\int_M g(\mathrm{d}\varphi, \psi)\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(M) = \int_M g(\varphi, \delta^g\psi)\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(M) \, .$$

□

Für das Kodifferential einer $(k+1)$-Form geben wir eine Berechnungsvorschrift mittels D an.

Satz 1.2.11 *Sei $\varphi \in \Omega^{k+1}(M)$, D der Levi-Civita-Zusammenhang und $(e_1, \ldots, e_m)$ ein Orthonormalreper zu g. Dann gilt*

$$(\delta^g\varphi)(X_1, \ldots, X_k) = -\sum_{i=1}^{m} (D_{e_i}\varphi)\,(e_i, X_1, \ldots, X_k)$$

für alle $X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(TM)$. □

1.3 Komplexe Zusammenhänge

Sei M nun wieder eine beliebige Mannigfaltigkeit.

Definition 1.3.1 *Eine Abbildung* $\mathsf{J} \in \Gamma(\mathrm{End}\,(TM))$ *mit*

$$\mathsf{J} \circ \mathsf{J} = -\mathrm{id}_{TM}$$

heißt fast-komplexe Struktur auf M*.*

Den Raum der fast-komplexen Strukturen auf M bezeichnen wir mit $\mathcal{J}(TM)$. Ist $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM)$, so heißt das Paar (M, J) fast-komplexe Mannigfaltigkeit.

Bemerkung 1.3.2 Jede fast-komplexe Mannigfaltigkeit (M, J) hat gerade Dimension $m = 2n$. Des Weiteren induziert J eine Orientierung auf M, denn alle Repere der Form

$$(X_1, \mathsf{J}X_1, \ldots, X_n, \mathsf{J}X_n)$$

sind in der gleichen Orientierung. □

Sei im Folgenden (M, J) als fast-komplexe Mannigfaltigkeit vorausgesetzt.

Definition 1.3.3 *Ein Zusammenhang* $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$ *mit* $\nabla \mathsf{J} = 0$ *heißt komplex.*

Sei $\mathrm{End}_+\,(TM, \mathsf{J})$ das Unterbündel von $\mathrm{End}\,(TM)$, dessen Faser über $x \in M$ genau aus den $\eta \in \mathrm{End}\,(T_xM)$ mit

$$\eta \circ \mathsf{J}_x = \mathsf{J}_x \circ \eta$$

besteht.

Satz 1.3.4 *Ist* $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$ *komplex, so ist* $R^\nabla \in \Omega^2\,(M, \mathrm{End}_+\,(TM, \mathsf{J}))$*.* □

Satz 1.3.5 *Der Raum der komplexen Zusammenhänge ist ein affiner Raum über dem Vektorraum* $\Omega^1\,(M, \mathrm{End}_+\,(TM, \mathsf{J}))$*.*

Beweis. Sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$ mit $\nabla \mathsf{J} = 0$ und $\zeta \in \Omega^1(M, \mathrm{End}\,(TM))$. Dann ist $\nabla + \zeta$ genau dann komplex, wenn

$$\zeta(X)(\mathsf{J}Y) = \mathsf{J}\zeta(X)Y$$

für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$. Die Behauptung ist somit gezeigt. □

Unter den fast-komplexen zeichnen wir wie folgt gewisse Strukturen aus.

Definition 1.3.6 *Eine fast-komplexe Struktur $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM)$ heißt integrabel, wenn auf M ein Atlas existiert, bezüglich dessen J in jeder Karte die Gestalt*

$$\mathsf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}$$

hat. Dabei ist $\mathbf{0}_n$ die n-dimensionale Nullmatrix und $\mathbf{1}_n$ die n-dimensionale Einheitsmatrix.

Eine integrable fast-komplexe Struktur J heißt auch komplexe Struktur. Ist J eine komplexe Struktur auf M, so heißt (M, J) komplexe Mannigfaltigkeit. Wir ordnen nun jeder fast-komplexen Struktur einen bestimmten Tensor zu.

Definition 1.3.7 *Der Nijenhuis-Tensor $N_{\mathsf{J}} \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(2,1)}(M)\right)$ ist durch*

$$N_{\mathsf{J}}(X,Y) := [X,Y] + \mathsf{J}\,[\mathsf{J}X,Y] + \mathsf{J}\,[X,\mathsf{J}Y] - [\mathsf{J}X,\mathsf{J}Y]$$

für $X, Y \in \Gamma(TM)$ definiert.

Bemerkung 1.3.8 Nach dem Theorem von Newlander-Nirenberg [24] ist eine fast-komplexe Struktur J genau dann integrabel, wenn $N_{\mathsf{J}} = 0$. □

Die folgenden Eigenschaften des Nijenhuis-Tensors können leicht verifiziert werden.

Lemma 1.3.9 *Für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ gelten die folgenden Gleichungen.*

1. $N_{\mathsf{J}}(X,Y) = -N_{\mathsf{J}}(Y,X) = -N_{\mathsf{J}}(\mathsf{J}X,\mathsf{J}Y)$
2. $N_{\mathsf{J}}(\mathsf{J}X,Y) = N_{\mathsf{J}}(X,\mathsf{J}Y) = -\mathsf{J}N_{\mathsf{J}}(X,Y)$

□

Für die Torsion komplexer Zusammenhänge haben wir

Satz 1.3.10 *Sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$ ein komplexer Zusammenhang. Dann gilt*

$$N_{\mathsf{J}}(X,Y) = -T^{\nabla}(X,Y) - \mathsf{J}\left(T^{\nabla}(\mathsf{J}X,Y)\right) - \mathsf{J}\left(T^{\nabla}(X,\mathsf{J}Y)\right) + T^{\nabla}(\mathsf{J}X,\mathsf{J}Y)$$

für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Beweis. Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$. Wegen $\nabla\mathsf{J} = 0$ erhalten wir sofort

$$\begin{aligned}
&- T^{\nabla}(X,Y) - \mathsf{J}\left(T^{\nabla}(\mathsf{J}X,Y)\right) - \mathsf{J}\left(T^{\nabla}(X,\mathsf{J}Y)\right) + T^{\nabla}(\mathsf{J}X,\mathsf{J}Y) \\
&= -\nabla_X Y + \nabla_Y X + [X,Y] - \mathsf{J}\left(\nabla_{\mathsf{J}X} Y\right) + \mathsf{J}\left(\nabla_Y(\mathsf{J}X)\right) + \mathsf{J}\,[\mathsf{J}X,Y] \\
&\quad - \mathsf{J}\left(\nabla_X(\mathsf{J}Y)\right) + \mathsf{J}\left(\nabla_{\mathsf{J}Y} X\right) + \mathsf{J}\,[X,\mathsf{J}Y] + \nabla_{\mathsf{J}X}(\mathsf{J}Y) - \nabla_{\mathsf{J}Y}(\mathsf{J}X) - [\mathsf{J}X,\mathsf{J}Y] \\
&= N_{\mathsf{J}}(X,Y)\,.
\end{aligned}$$

□

Der vorhergehende Satz führt zu einer weiteren Beziehung zwischen dem Nijenhuis-Tensor und der Torsion eines komplexen Zusammenhangs.

Satz 1.3.11 *Sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$ wieder ein komplexer Zusammenhang und gelte*

$$T^{\nabla} = \lambda N_{\mathsf{J}}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $N_{\mathsf{J}} = 0$ oder $\lambda = -\frac{1}{4}$.

Beweis. Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Mit den Eigenschaften von N_{J} aus Lemma 1.3.9 und Satz 1.3.10 folgt

$$\begin{aligned} N_{\mathsf{J}}(X,Y) &= -T^{\nabla}(X,Y) - \mathsf{J}\left(T^{\nabla}(\mathsf{J}X,Y)\right) - \mathsf{J}\left(T^{\nabla}(X,\mathsf{J}Y)\right) + T^{\nabla}(\mathsf{J}X,\mathsf{J}Y) \\ &= -\lambda N_{\mathsf{J}}(X,Y) - \lambda \mathsf{J}\left(N_{\mathsf{J}}(\mathsf{J}X,Y)\right) - \lambda \mathsf{J}\left(N_{\mathsf{J}}(X,\mathsf{J}Y)\right) + \lambda N_{\mathsf{J}}(\mathsf{J}X,\mathsf{J}Y) \\ &= -4\lambda N_{\mathsf{J}}(X,Y) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Zum Ende dieses Abschnitts wollen wir noch einige, später wichtige Betrachtungen zu fast-komplexen Strukturen anstellen. Dazu sei $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM)$ und $T_{\mathbb{C}}M := TM \otimes \mathbb{C}$ das komplexifizierte Tangentialbündel, das heißt

$$\Gamma\left(T_{\mathbb{C}}M\right) = \{X + \mathrm{i}Y \ : \ X, Y \in \Gamma(TM)\} \ .$$

Wir setzen J durch

$$\mathsf{J}(X + \mathrm{i}Y) := \mathsf{J}X + \mathrm{i}\mathsf{J}Y$$

für $X, Y \in \Gamma(TM)$ auf $T_{\mathbb{C}}M$ fort. Wegen $\mathsf{J}^2 = -\mathrm{id}_{T_{\mathbb{C}}M}$ hat J genau die Eigenwerte $+\mathrm{i}$ und $-\mathrm{i}$. Die entsprechenden Eigenbündel bezeichnen wir mit $T^{1,0}M$ und $T^{0,1}M$.

Lemma 1.3.12 *Es gilt*

$$\Gamma\left(T^{1,0}M\right) = \{X - \mathrm{i}\mathsf{J}X \ : \ X \in \Gamma(TM)\}$$

und

$$\Gamma\left(T^{0,1}M\right) = \{X + \mathrm{i}\mathsf{J}X \ : \ X \in \Gamma(TM)\} \ .$$

Beweis. Sei $(X + \mathrm{i}Y) \in \Gamma\left(T_{\mathbb{C}}M\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathsf{J}(X+\mathrm{i}Y) = \mathrm{i}(X+\mathrm{i}Y) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathsf{J}X + \mathrm{i}\mathsf{J}Y = \mathrm{i}X - Y \\ &\Leftrightarrow \quad Y = -\mathsf{J}X \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathsf{J}(X+\mathrm{i}Y) = -\mathrm{i}(X+\mathrm{i}Y) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathsf{J}X + \mathrm{i}\mathsf{J}Y = -\mathrm{i}X + Y \\ &\Leftrightarrow \quad Y = \mathsf{J}X \ . \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Die Aufspaltung

$$T_{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

von $T_{\mathbb{C}}M$ induziert eine Aufspaltung des Raumes der komplexwertigen k-Formen in

$$\Omega^k(M,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \Gamma\left(\Lambda^p\left(T^{1,0}M\right)^* \otimes \Lambda^q\left(T^{0,1}M\right)^*\right) \ .$$

Eine (p,q)-Form ist dann ein Schnitt in dem Bündel $\Lambda^p\,(T^{1,0}M)^* \otimes \Lambda^q\,(T^{0,1}M)^*$.

1.4 Hermitesche Zusammenhänge

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir wollen nun fast-komplexe Strukturen betrachten, welche g invariant lassen.

Definition 1.4.1 *Bezeichne $\mathcal{J}(TM,g)$ den Raum der fast-komplexen Strukturen J auf M mit*

$$g(\mathsf{J}X,\mathsf{J}Y) = g(X,Y)$$

für alle $X,Y \in \Gamma(TM)$. Ist $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM,g)$, so heißt das Tripel (M,g,J) fast-Hermitesche Mannigfaltigkeit. Eine fast-Hermitesche Mannigfaltigkeit (M,g,J) mit komplexer Struktur J heißt Hermitesche Mannigfaltigkeit.

Sei in diesem Abschnitt immer (M,g,J) als fast-Hermitesche Mannigfaltigkeit vorausgesetzt. Mit Hilfe der Riemannschen Metrik g und $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM,g)$ können wir ein weiteres $(2,0)$-Tensorfeld definieren.

Definition 1.4.2 *Die Kähler-Form $\omega \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(2,0)}(M)\right)$ ist durch*

$$\omega(X,Y) := g(\mathsf{J}X,Y)$$

für $X,Y \in \Gamma(TM)$ gegeben.

Im folgenden Satz sind einige Eigenschaften der Kähler-Form angegeben.

Satz 1.4.3 *Sei (M,g,J) eine fast-Hermitesche Mannigfaltigkeit und sei $\omega \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(2,0)}(M)\right)$ die zugehörige Kähler-Form. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

1. $\omega \in \Omega^2(M)$.
2. $\omega(\mathsf{J}X,\mathsf{J}Y) = \omega(X,Y)$ *für alle* $X,Y \in \Gamma(TM)$.
3. $g(X,Y) = \omega(X,\mathsf{J}Y)$ *für alle* $X,Y \in \Gamma(TM)$.
4. ω *ist nichtausgeartet.*

Beweis. Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$. Die Aussagen 1. und 2. folgen aus

$$\omega(X, Y) = g(\mathsf{J}X, Y) = g(\mathsf{J}\mathsf{J}X, \mathsf{J}Y) = -g(\mathsf{J}Y, X) = -\omega(Y, X)$$

und

$$\omega(\mathsf{J}X, \mathsf{J}Y) = g(\mathsf{J}\mathsf{J}X, \mathsf{J}Y) = g(\mathsf{J}X, Y) = \omega(X, Y) \; .$$

Die dritte Aussage folgt aus 2. und die vierte Aussage ist eine direkte Konsequenz der Definition von ω. □

Mit Bedingungen an die Kähler-Form ω können wir besondere fast-Hermitesche Mannigfaltigkeiten auszeichnen.

Definition 1.4.4 *Sei (M, g, J) eine fast-Hermitesche Mannigfaltigkeit und sei $\omega \in \Omega^2(M)$ die assoziierte Kähler-Form. Ist ω geschlossen, so heißt (M, g, J) fast-Kählersche Mannigfaltigkeit. Ist überdies noch J integrabel, so wird (M, g, J) Kählersche Mannigfaltigkeit genannt.*

Die Betrachtung von komplexen metrischen Zusammenhängen führt uns auf

Definition 1.4.5 *Ein metrischer Zusammenhang ∇ auf M mit $\nabla\mathsf{J} = 0$ heißt Hermitesch.*

Beispiel 1.4.6 Unter den Hermiteschen Zusammenhängen gibt es eine Reihe von ausgezeichneten, von denen wir hier drei angeben wollen. Für weitere Betrachtungen verweisen wir auf [14]. Sei D der Levi-Civita-Zusammenhang zu g.

Der sogenannte erste kanonische Zusammenhang ∇^L aus [22] ist durch

$$\nabla^L_X Y := D_X Y + \frac{1}{2} (D_X \mathsf{J}) (\mathsf{J}Y) \quad \text{für} \quad X, Y \in \Gamma(TM)$$

gegeben. ∇^L ist die orthogonale Projektion von D als Punkt in $\mathcal{C}(TM, g)$ auf den affinen Unterraum der Hermiteschen Zusammenhänge.

Sei

$$\mathrm{d}^c\omega(X, Y, Z) := -\mathrm{d}\omega(\mathsf{J}X, \mathsf{J}Y, \mathsf{J}Z) \quad \text{für} \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

und bezeichne $(\mathrm{d}^c\omega)^+$ den $(2,1) + (1,2)$-Anteil von $\mathrm{d}^c\omega$. Den sogenannten Chern-Zusammenhang ∇^C erhält man aus

$$\begin{aligned} g\left(\nabla^C_X Y, Z\right) &= g\left(D_X Y, Z\right) + \frac{1}{2} g\left(\left(D_X \mathsf{J}\right)(\mathsf{J}Y), Z\right) \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(\left(\mathrm{d}^c\omega\right)^+ (X, Y, Z) + \left(\mathrm{d}^c\omega\right)^+ (X, \mathsf{J}Y, \mathsf{J}Z)\right) \end{aligned}$$

für $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Dieser ist gerade dadurch definiert, dass der $(0,1)$-Teil von ∇^C mit dem Cauchy-Riemann-Operator $\bar{\partial}$ übereinstimmt.

Der Bismut-Zusammenhang ∇^B ist durch

$$
\begin{aligned}
g\left(\nabla^B_X Y, Z\right) = g\left(D_X Y, Z\right) + \frac{1}{2} g\left(\left(D_X \mathsf{J}\right)\left(\mathsf{J}Y\right), Z\right) \\
- \frac{1}{4}\left(\left(\mathrm{d}^c\omega\right)^+\left(X, Y, Z\right) + \left(\mathrm{d}^c\omega\right)^+\left(X, \mathsf{J}Y, \mathsf{J}Z\right)\right)
\end{aligned}
$$

für $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ definiert. ∇^B ist derjenige Hermitesche Zusammenhang, für den die Differenz von Torsion und Nijenhuis-Tensor schiefsymmetrisch ist. □

Bemerkung 1.4.7 Die Integrabilität der fast-komplexen Struktur J einer Kählerschen Mannigfaltigkeit (M, g, J) ist äquivalent dazu, dass der Levi-Civita-Zusammenhang D komplex bezüglich J ist. Genauer gilt auf einer fast-Hermiteschen Mannigfaltigkeit (M, g, J) die Gleichung

$$
2g\left(\left(D_X \mathsf{J}\right) Y, Z\right) = \mathrm{d}\omega(X, Y, Z) - \mathrm{d}\omega(X, \mathsf{J}Y, \mathsf{J}Z) - g(\mathsf{J}X, N_{\mathsf{J}}(Y, Z))
$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Der Beweis folgt direkt aus Gleichung (1.1.1) für $\mathrm{d}\omega$ und den Definitionen von D und N_{J}. □

Lemma 1.4.8 *Für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ gilt*

$$
\mathrm{d}\omega(X, Y, Z) = g\left(\left(D_X \mathsf{J}\right) Y, Z\right) + g\left(\left(D_Y \mathsf{J}\right) Z, X\right) + g\left(\left(D_Z \mathsf{J}\right) X, Y\right) \ .
$$

Beweis. Seien $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Dann schließen wir mittels Gleichung (1.1.1) und der Torsionsfreiheit von D

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(X, Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) - \omega\left(D_X Y, Z\right) - \omega\left(Y, D_X Z\right) \\
&\quad + Y(\omega(Z, X)) - \omega\left(D_Y Z, X\right) - \omega\left(Z, D_Y X\right) \\
&\quad + Z(\omega(X, Y)) - \omega\left(D_Z X, Y\right) - \omega\left(X, D_Z Y\right) \\
&= X(g(\mathsf{J}Y, Z)) - g\left(\mathsf{J}D_X Y, Z\right) - g\left(\mathsf{J}Y, D_X Z\right) \\
&\quad + Y(g(\mathsf{J}Z, X)) - g\left(\mathsf{J}D_Y Z, X\right) - g\left(\mathsf{J}Z, D_Y X\right) \\
&\quad + Z(g(\mathsf{J}X, Y)) - g\left(\mathsf{J}D_Z X, Y\right) - g\left(\mathsf{J}X, D_Z Y\right) \\
&= g\left(D_X(\mathsf{J}Y), Z\right) - g\left(\mathsf{J}D_X Y, Z\right) + g\left(D_Y(\mathsf{J}Z), X\right) \\
&\quad - g\left(\mathsf{J}D_Y Z, X\right) + g\left(D_Z(\mathsf{J}X), Y\right) - g\left(\mathsf{J}D_Z X, Y\right) \\
&= g\left(\left(D_X \mathsf{J}\right) Y, Z\right) + g\left(\left(D_Y \mathsf{J}\right) Z, X\right) + g\left(\left(D_Z \mathsf{J}\right) X, Y\right) \ .
\end{aligned}
$$

□

Das folgende Lemma zeigt, dass Hermitesche Zusammenhänge auch mit Hilfe der Kähler-Form definiert werden können.

Lemma 1.4.9 *Sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$. Dann resultiert aus der Annahme von zweien der folgenden Aussagen jeweils die dritte.*

1. $\nabla g = 0$.
2. $\nabla \mathsf{J} = 0$.
3. $\nabla \omega = 0$.

Beweis. Sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$. Die Behauptung folgt sofort aus

$$\begin{aligned}
(\nabla_X g)(Y,Z) &= X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\
&= X(\omega(Y,\mathsf{J}Z)) - \omega(\nabla_X Y, \mathsf{J}Z) - \omega(Y, \mathsf{J}\nabla_X Z) \\
&= X(\omega(Y,\mathsf{J}Z)) - \omega(\nabla_X Y, \mathsf{J}Z) - \omega(Y, \nabla_X(\mathsf{J}Z)) + \omega(Y, (\nabla_X \mathsf{J})Z) \\
&= (\nabla_X \omega)(Y, \mathsf{J}Z) + \omega(Y, (\nabla_X \mathsf{J})Z)
\end{aligned}$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. □

Jeder Hermitesche Zusammenhang erfüllt also $\nabla\omega = 0$. Umgekehrt kann man Hermitesche Zusammenhänge auch durch $\nabla\omega = 0$ und $\nabla\mathsf{J} = 0$ definieren. Dies rechtfertigt die Bezeichnung $\mathcal{C}(TM, \omega, \mathsf{J})$ für den Raum der Hermiteschen Zusammenhänge.

Um diesen genauer charakterisieren zu können, definieren wir das Unterbündel $\mathrm{End}_+(TM, \omega, \mathsf{J})$ von $\mathrm{End}(TM, \omega)$ durch

$$\mathrm{End}_+(TM, \omega, \mathsf{J}) := \mathrm{End}(TM, \omega) \cap \mathrm{End}_+(TM, \mathsf{J}) \ .$$

Aus den Sätzen 1.1.11 und 1.3.5 erhalten wir sofort

Satz 1.4.10 *Der Raum $\mathcal{C}(TM, \omega, \mathsf{J})$ der Hermiteschen Zusammenhänge ist ein affiner Raum. Der zugehörige Vektorraum ist $\Omega^1(M, \mathrm{End}_+(TM, \omega, \mathsf{J}))$.* □

Definition 1.4.11 *Ein Reper $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_{2n})$ mit*

$$g(\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_j) = \delta_{ij} \quad \textit{für} \quad i,j = 1, \ldots, 2n$$

und

$$\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i = \mathsf{e}_{i+n} \quad \textit{für} \quad i = 1, \ldots, n$$

heißt unitäres Reper zu $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, g)$.

Wir setzen $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, g)$ auf T^*M durch

$$(\mathsf{J}\alpha)(X) := -\alpha(\mathsf{J}X)$$

für $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ und $X \in \Gamma(TM)$ fort. Damit ist $(\mathsf{e}^1, \ldots, \mathsf{e}^n, \mathsf{J}\,\mathsf{e}^1, \ldots, \mathsf{J}\,\mathsf{e}^n)$ das duale Reper zu $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_n)$. Weiterhin sei M mit der in Bemerkung 1.3.2 angegebenen Orientierung versehen.

Bemerkung 1.4.12 Mit einem unitären Reper $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_{2n})$ ergibt sich für die Kähler-Form

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{e}^i \wedge \mathsf{J}\,\mathsf{e}^i \ .$$

Wir setzen

$$\omega^{(k)} := \frac{1}{k!}\omega^k = \frac{1}{k!}\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{k\text{-mal}} \quad \text{für} \quad k \in \{0, \ldots, n\} \ .$$

Wenden wir nun den Riemannschen Hodge-Operator auf ω an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} *_g\omega &= \sum_{i=1}^{n} *_g(\mathsf{e}^i \wedge \mathsf{J}\,\mathsf{e}^i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{e}^1 \wedge \mathsf{J}\,\mathsf{e}^1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{e}^{i-1} \wedge \mathsf{J}\,\mathsf{e}^{i-1} \wedge \mathsf{e}^{i+1} \wedge \mathsf{J}\,\mathsf{e}^{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathsf{e}^n \wedge \mathsf{J}\,\mathsf{e}^n \\ &= \omega^{(n-1)} \ . \end{aligned}$$

Für eine fast-Kählersche Mannigfaltigkeit (M, g, J) folgt damit

$$\delta^g\omega = - *_g \mathrm{d} *_g \omega = - *_g \mathrm{d}\omega^{(n-1)} = 0 \ .$$

□

Wir beschränken die folgenden Überlegungen auf eine fast-Kählersche Mannigfaltigkeit (M, g, J).

Lemma 1.4.13 *Sei D der Levi-Civita-Zusammenhang zu g. Für jedes $Y \in \Gamma(TM)$ ist die Abbildung*

$$X \in \Gamma(TM) \mapsto (D_X\mathsf{J})\,Y \in \Gamma(TM)$$

spurfrei.

Beweis. Sei $(e_1, \ldots, e_{2n})$ ein Orthonormalreper zu g und $Y \in \Gamma(TM)$. Dann haben wir nach Satz 1.2.11

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(X \mapsto (D_X\mathsf{J})\,Y) &= \sum_{i=1}^{2n} g\left((D_{e_i}\mathsf{J})\,Y, e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \left(g\left(D_{e_i}(\mathsf{J}Y), e_i\right) - g\left(\mathsf{J}\left(D_{e_i}Y\right), e_i\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \left(e_i(g(\mathsf{J}Y, e_i)) - g\left(\mathsf{J}Y, D_{e_i}e_i\right) - g\left(\mathsf{J}\left(D_{e_i}Y\right), e_i\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \left(e_i(\omega(Y, e_i)) - \omega\left(Y, D_{e_i}e_i\right) - \omega\left(\left(D_{e_i}Y\right), e_i\right)\right) \\ &= - \sum_{i=1}^{2n} \left(D_{e_i}\omega\right)(e_i, Y) \\ &= (\delta^g\omega)(Y) \ . \end{aligned}$$

Dies und Bemerkung 1.4.12 liefern die Behauptung. □

Für den folgenden Satz benötigen wir noch eine Vorüberlegung.

Bemerkung 1.4.14 Sei E ein Vektorbündel über der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) und $\nabla \in \mathcal{C}(E)$. Dann ist durch

$$(\nabla_X \mu)\, Y := \nabla_X(\mu(Y)) - \mu\,(D_X Y)$$

für $\mu \in \Omega^1(M, E)$ und $X, Y \in \Gamma(TM)$ ein Zusammenhang ∇ in $T^*M \otimes E$ definiert. Speziell erhalten wir für $D\mathsf{J} \in \Omega^1(M, \mathrm{End}\,(TM))$

$$(DD\mathsf{J})\,(X, Y) := (D_X D\mathsf{J})\, Y = D_X D_Y \mathsf{J} - D_{D_X Y} \mathsf{J}\ .$$

□

Satz 1.4.15 *Die Spur der Abbildung*

$$Z \in \Gamma(TM) \mapsto (DD\mathsf{J})(X, Z)Y \in \Gamma(TM)$$

verschwindet für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Beweis. Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$. Wir berechnen die Spur der Abbildung in einem Punkt $x \in M$. In einer Umgebung von x können wir ein Orthonormalreper $(e_1, \ldots, e_{2n})$ so wählen, dass $(De_i)_x = 0$ für $i = 1, \ldots, 2n$. In dem Punkt $x \in M$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,(Z \mapsto (DD\mathsf{J})(X, Z)Y) &= \sum_{i=1}^{2n} g\,((DD\mathsf{J})(X, e_i)Y, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} g\,((D_X D_{e_i} \mathsf{J})\, Y, e_i) - \sum_{i=1}^{2n} g\,((D_{D_X e_i} \mathsf{J})\, Y, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} g\,(D_X\,((D_{e_i} \mathsf{J})\, Y)\,, e_i) - \sum_{i=1}^{2n} g\,((D_{e_i} \mathsf{J})\,(D_X Y)\,, e_i) \\
&= X \left(\sum_{i=1}^{2n} g\,((D_{e_i} \mathsf{J})\, Y, e_i) \right) - \sum_{i=1}^{2n} g\,((D_{e_i} \mathsf{J})\,(D_X Y)\,, e_i)\ .
\end{aligned}$$

Mit Lemma 1.4.13 folgt die Behauptung. □

1.5 Symplektische Zusammenhänge

Die wichtigsten Definitionen und Sätze der symplektischen Geometrie wollen wir in diesem Abschnitt zusammentragen. Wir beginnen mit dem Begriff der fast-symplektischen Mannigfaltigkeit.

Definition 1.5.1 *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^2(M)$. Das geordnete Paar (M, ω) heißt fast-symplektische Mannigfaltigkeit, wenn ω nichtausgeartet ist. Die Form ω wird dann auch fast-symplektische Struktur auf M genannt. Ist ferner ω geschlossen, so heißt (M, ω) symplektische Mannigfaltigkeit und ω symplektische Struktur.*

Da ω nichtausgeartet ist, erhalten wir eine notwendige Bedingung an fast-symplektische Mannigfaltigkeiten.

Satz 1.5.2 *Jede fast-symplektische Mannigfaltigkeit hat gerade Dimension $m = 2n$ und ist orientierbar.* □

Wie üblich wählen wir die Orientierung so, dass das Reper $(X_1, \ldots, X_{2n})$ genau dann in der Orientierung ist, wenn $\omega^{(n)}(X_1, \ldots, X_{2n}) > 0$.

Beispiel 1.5.3 Das einfachste Beispiel für eine symplektische Mannigfaltigkeit ist $\mathbb{R}^{2n}$ mit

$$\omega_0 := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{n+i} \ .$$

Jedoch existiert nicht auf jeder orientierbaren, geradedimensionalen Mannigfaltigkeit eine symplektische Struktur. Ein Beispiel dafür ist S^{2n} mit $n \geq 2$ [23]. □

Wir definieren nun Abbildungen, die die symplektische Struktur invariant lassen.

Definition 1.5.4 *Seien (M_1, ω_1) und (M_2, ω_2) symplektische Mannigfaltigkeiten. Ein Diffeomorphismus $f : M_1 \to M_2$ mit*

$$f^*\omega_2 = \omega_1$$

heißt Symplektomorphismus. Existiert ein Symplektomorphismus $f : M_1 \to M_2$, so heißen (M_1, ω_1) und (M_2, ω_2) symplektomorph.

Damit können wir einen der grundlegendsten Sätze der symplektischen Geometrie formulieren.

Satz 1.5.5 (Darboux-Theorem) *Jede symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) der Dimension $2n$ ist lokal symplektomorph zu $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Das heißt, zu jedem $x \in M$ existieren eine offene Umgebung $U \subseteq M$ und eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^{2n}$ derart, dass*

$$f^*\omega_0 = \omega \ .$$

□

Einen Beweis dazu findet man zum Beispiel in [17]. Die einzige lokale Invariante einer symplektischen Mannigfaltigkeit ist somit die Dimension.

Sei in diesem Abschnitt (M,ω) immer als fast-symplektische Mannigfaltigkeit vorausgesetzt. Dann können wir folgendermaßen spezielle Repere auszeichnen.

Definition 1.5.6 *Ein Reper* $(e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n)$ *auf* (M,ω) *mit*

$$\omega(e_i,e_j)=\omega(f_i,f_j)=0 \quad \textit{und} \quad \omega(e_i,f_j)=\delta_{ij}$$

für alle $i,j=1,\dots,n$ *heißt symplektisches Reper.*

Auf einer fast-symplektischen Mannigfaltigkeit betrachten wir nun Zusammenhänge, welche an die fast-symplektische Struktur angepasst sind.

Definition 1.5.7 *Ein Zusammenhang* ∇ *auf* (M,ω) *heißt symplektisch, falls* ω *bezüglich* ∇ *parallel ist, das heißt* $\nabla\omega=0$.

Nach Satz 1.1.11 ist der Raum $\mathcal{C}(TM,\omega)$ der symplektischen Zusammenhänge auf (M,ω) ein affiner Raum über dem Vektorraum $\Omega^1(M,\mathrm{End}\,(TM,\omega))$. Sei $\mathcal{C}_0(TM,\omega)$ der Raum der torsionsfreien symplektischen Zusammenhänge auf (M,ω). Dann haben wir

Lemma 1.5.8 *Der Raum* $\mathcal{C}_0(TM,\omega)$ *ist genau dann nichtleer, wenn* (M,ω) *symplektisch ist.*

Beweis. Für $\nabla\in\mathcal{C}_0(TM,\omega)$ folgt aus Lemma 1.1.10 sofort $\mathrm{d}\omega=0$. Für die Umkehrung verweisen wir auf [25]. □

Anders als bei metrischen Zusammenhängen reicht es in diesem Fall nicht aus die Torsionsfreiheit zu fordern, um einen ausgezeichneten symplektischen Zusammenhang zu erhalten. Genauer gilt sogar

Lemma 1.5.9 *Auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit* (M,ω) *kann der Raum* $\mathcal{C}_0(TM,\omega)$ *der torsionsfreien symplektischen Zusammenhänge mit dem Raum* $\mathbf{S}^{3,0}(M)$ *der total symmetrischen* $(3,0)$*-Tensorfelder identifiziert werden.*

Beweis. Sei $\nabla\in\mathcal{C}_0(TM,\omega)$ und $\zeta\in\Omega^1(M,\mathrm{End}\,(TM,\omega))$. Dann ist

$$\nabla' := \nabla+\zeta\in\mathcal{C}(TM,\omega)\ .$$

Weiter haben wir für $X,Y\in\Gamma(TM)$

$$\begin{aligned} & [X,Y]=\nabla'_XY-\nabla'_YX \\ \Leftrightarrow\quad & [X,Y]=\nabla_XY+\zeta(X)Y-\nabla_YX-\zeta(Y)X \\ \Leftrightarrow\quad & \zeta(X)Y=\zeta(Y)X\ . \end{aligned}$$

Fassen wir ζ mittels

$$\zeta(X,Y,Z):=\omega(\zeta(X)Y,Z)$$

als Schnitt von $\mathcal{T}^{(3,0)}(M)$ auf, so folgt die Behauptung. □

Analog zum Riemannschen Fall definieren wir einen Krümmungstensor, welcher jetzt allerdings von der Wahl des Zusammenhangs abhängt.

Definition 1.5.10 *Der symplektische Krümmungstensor* $\mathsf{S}^\nabla \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(4,0)}(M)\right)$ *zu einem Zusammenhang* $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$ *ist durch*

$$\mathsf{S}^\nabla(X_1, X_2, X_3, X_4) := \omega\left(R^\nabla(X_1, X_2)X_3, X_4\right)$$

für $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ *definiert.*

Man überprüft leicht, dass der symplektische Krümmungstensor die folgenden Symmetrien hat.

Lemma 1.5.11 *Seien* $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ *und sei* $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$*. Dann gilt*

$$\mathsf{S}^\nabla(X_1, X_2, X_3, X_4) = -\,\mathsf{S}^\nabla(X_2, X_1, X_3, X_4)\ .$$

Ist zusätzlich ∇ *symplektisch, so gilt*

$$\mathsf{S}^\nabla(X_1, X_2, X_3, X_4) = \mathsf{S}^\nabla(X_1, X_2, X_4, X_3)\ .$$

□

Als Nächstes definieren wir das symplektische Analogon zum Riemannschen Hodge-Operator. Dazu setzen wir ω wie folgt auf $\Omega^k(M)$ fort. Sei

$$s = (e_1, \dots, e_m) = (e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$$

ein symplektisches Reper auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$. Wir definieren eine fast-komplexe Struktur J^s auf U durch

$$\mathsf{J}^s e_i = f_i \quad \text{für alle} \quad i = 1, \dots, n\ .$$

Sind nun $\varphi, \psi \in \Omega^k(M)$, so setzen wir

$$\omega(\varphi, \psi) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} \varphi\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\right) \psi\left(\mathsf{J}^s e_{i_1}, \dots, \mathsf{J}^s e_{i_k}\right)\ .$$

Definition 1.5.12 *Sei* $k \in \{0, \dots, 2n\}$*. Dann definiert*

$$\omega(\varphi_1, \varphi_2)\omega^{(n)} = \varphi_1 \wedge *_\omega \varphi_2 \quad \textit{für alle} \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \Omega^k(M)$$

einen Isomorphismus $*_\omega : \Omega^k(M) \to \Omega^{2n-k}(M)$*, genannt symplektischer Hodge-Operator.*

Die hier verwendete $2n$-Form $\omega^{(n)}$ wird auch symplektische Volumenform genannt. Im folgenden Lemma sind einige Eigenschaften von $*_\omega$ zusammengestellt. Für einen Beweis verweisen wir auf [12].

Lemma 1.5.13 *1.* $*_\omega *_\omega = \mathrm{id}_{\Omega^k(M)}$.

2. $*_\omega f = f\omega^{(n)}$ *für alle* $f \in C^\infty(M)$.

3. $*_\omega \psi = \psi \wedge \omega^{(n-1)}$ *für alle* $\psi \in \Omega^1(M)$.

4. $*_\omega \varphi = \dfrac{\varphi \wedge \omega^{(n-1)}}{\omega^{(n)}}\omega^{(n-1)} - \varphi \wedge \omega^{(n-2)}$ *für alle* $\varphi \in \Omega^2(M)$.

5. $*_\omega \omega = \omega^{(n-1)}$.

Mittels dieser Eigenschaften erhalten wir folgende Beschreibung von $*_\omega$ auf $\Omega^2(M)$.

Lemma 1.5.14 *Für alle* $\varphi \in \Omega^2(M)$ *ist*

$$*_\omega \varphi = \omega(\varphi, \omega)\omega^{(n-1)} - \varphi \wedge \omega^{(n-2)} \ .$$

Beweis. Sei $\varphi \in \Omega^2(M)$. Dann haben wir

$$\omega(\varphi, \omega)\omega^{(n)} = \varphi \wedge *_\omega \omega = \varphi \wedge \omega^{(n-1)}$$

und damit

$$\omega(\varphi, \omega) = \frac{\varphi \wedge \omega^{(n-1)}}{\omega^{(n)}} \ .$$

Dies und 4. aus Lemma 1.5.13 liefern die Behauptung. □

Mit Lemma 1.5.14 können wir leicht die folgende Aussage aus [7] beweisen.

Satz 1.5.15 *Für alle* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega^2(M)$ *gilt*

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \omega^{(n-2)} = \left(\omega(\varphi_1, \omega)\omega(\varphi_2, \omega) - \omega(\varphi_1, \varphi_2)\right)\omega^{(n)} \ .$$

Beweis. Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega^2(M)$. Nach Lemma 1.5.14 haben wir

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \omega^{(n-2)} &= \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \omega^{(n-2)} + \omega(\varphi_2, \omega)\varphi_1 \wedge \omega^{(n-1)} - \varphi_1 \wedge \omega(\varphi_2, \omega)\omega^{(n-1)} \\
&= \omega(\varphi_2, \omega)\varphi_1 \wedge \omega^{(n-1)} - \varphi_1 \wedge \left(\omega(\varphi_2, \omega)\omega^{(n-1)} - \varphi_2 \wedge \omega^{(n-2)}\right) \\
&= \omega(\varphi_2, \omega)\varphi_1 \wedge *_\omega \omega - \varphi_1 \wedge *_\omega \varphi_2 \\
&= \omega(\varphi_2, \omega)\omega(\varphi_1, \omega)\omega^{(n)} - \omega(\varphi_1, \varphi_2)\omega^{(n)} \ .
\end{aligned}$$

□

Einer fast-symplektischen Mannigfaltigkeit ordnen wir wie folgt eine ausgewählte Klasse von fast-komplexen Strukturen zu.

Definition 1.5.16 *Eine fast-komplexe Struktur* $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM)$ *heißt* ω*-verträglich, falls*

$$g(X,Y) := \omega(X, \mathsf{J}Y) \quad \text{für} \quad X,Y \in \Gamma(TM)$$

eine Riemannsche Metrik g *auf* M *definiert.*

Den Raum der ω-verträglichen fast-komplexen Strukturen auf M bezeichnen wir mit $\mathcal{J}(TM,\omega)$.

Satz 1.5.17 *Für jede fast-symplektische Mannigfaltigkeit* (M,ω) *ist der Raum* $\mathcal{J}(TM,\omega)$ *nichtleer und kontrahierbar.* □

Einen Beweis dieses Satzes findet man zum Beispiel in [3]. Weiterführende Betrachtungen zu $\mathcal{J}(TM,\omega)$ werden in Kapitel 4 angestellt.

Der nachfolgende Satz liefert einen direkten Bezug zu den Überlegungen aus Abschnitt 1.4.

Satz 1.5.18 *Sei* (M,ω) *eine fast-symplektische Mannigfaltigkeit,* $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM,\omega)$ *und* g *definiert durch*

$$g(X,Y) := \omega(X, \mathsf{J}Y)$$

für $X,Y \in \Gamma(TM)$*. Dann ist* (M,g,J) *eine fast-Hermitesche Mannigfaltigkeit und* ω *die zugehörige Kähler-Form. Ist* (M,ω) *sogar symplektisch, so ist* (M,g,J) *fast-Kählersch.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass g invariant unter J ist. Mit der Symmetrie von g folgt

$$g(\mathsf{J}X,\mathsf{J}Y) = -\omega(\mathsf{J}X,Y) = \omega(Y,\mathsf{J}X) = g(Y,X) = g(X,Y)$$

für alle $X,Y \in \Gamma(TM)$. □

Lemma 1.5.19 *Ist* ∇ *ein symplektischer Zusammenhang und* $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM,\omega)$ *mit* $\nabla\mathsf{J} = 0$*, so gilt*

$$\mathsf{S}^\nabla(X_1,X_2,\mathsf{J}X_3,\mathsf{J}X_4) = \mathsf{S}^\nabla(X_1,X_2,X_3,X_4)$$

für alle $X_1,X_2,X_3,X_4 \in \Gamma(TM)$*.*

Beweis. Dies ist eine direkte Konsequenz aus Satz 1.3.4. □

Kapitel 2

Torsion, Ricci-Tensor und Skalarkrümmung

Das Anliegen dieses Kapitels ist zweierlei. Zum Einen wird untersucht, ob gewisse Bedingungen an die Torsion auf interessante symplektische Zusammenhänge führen. Zum Anderen werden verschiedene Begriffe des Ricci-Tensors und der Skalarkrümmung im Kontext der symplektischen Geometrie bereitgestellt und miteinander verglichen. Mit Hilfe dieser Größen konstruierte Funktionale werden wir in den darauffolgenden Kapiteln untersuchen.

2.1 Torsion als 3-Form

In der String-Theorie untersucht man Hermitesche Zusammenhänge mit nichtverschwindender, total schiefsymmetrischer Torsion. Das heißt, man interessiert sich für Hermitesche Zusammenhänge ∇ mit $T^\nabla \neq 0$ und

$$g\left(T^\nabla(X,Y),Z\right) = -g\left(T^\nabla(X,Z),Y\right) \quad \text{für alle} \quad X,Y,Z \in \Gamma(TM)\ .$$

Wie die folgenden Überlegungen zeigen, ist dieser Ansatz im symplektischen Fall wenig interessant. Dazu sei (M,ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit.

Satz 2.1.1 *Sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM,\omega)$ und gelte*

1. $\omega\left(T^\nabla(X,Y),Z\right) = -\omega\left(T^\nabla(X,Z),Y\right)$ *oder*
2. $\omega\left(T^\nabla(X,Y),Z\right) = \omega\left(T^\nabla(X,Z),Y\right)$

für alle $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$. Dann ist $T^\nabla = 0$.

Beweis. Seien $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ und sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM,\omega)$. Wegen $\nabla\omega = 0$ können wir Lemma 1.1.10 anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}\omega(X,Y,Z) \\ &= \omega\left(T^\nabla(X,Y),Z\right) + \omega\left(T^\nabla(Y,Z),X\right) + \omega\left(T^\nabla(Z,X),Y\right)\ . \end{aligned}$$

Im ersten Fall ergibt sich nun

$$3\omega\left(T^{\nabla}(X,Y),Z\right)=0$$

und im zweiten

$$-\omega\left(T^{\nabla}(X,Y),Z\right)=0\ .$$

Da ω nichtausgeartet ist, folgt die Behauptung. □

Auf keiner symplektischen Mannigfaltigkeit existiert also ein symplektischer Zusammenhang mit total schiefsymmetrischer und nichttrivialer Torsion.

Eine andere Möglichkeit wäre nun ein $\mathsf{J}\in\mathcal{J}(TM,\omega)$ zu fixieren und Hermitesche Zusammenhänge auf M zu untersuchen. Dabei kann T^{∇} dann mittels der assoziierten Metrik g als $(3,0)$-Tensorfeld verstanden werden.

Satz 2.1.2 *Sei (M,g,J) eine fast-Kählersche Mannigfaltigkeit und ∇ ein Hermitescher Zusammenhang mit*

$$g\left(T^{\nabla}(X,Y),Z\right)=-g\left(T^{\nabla}(X,Z),Y\right)$$

für alle $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$. Dann ist $T^{\nabla}=0$ und J integrabel.

Beweis. Seien $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ und sei $\nabla\in\mathcal{C}(TM,\omega,\mathsf{J})$. Mit den Eigenschaften von N_{J} aus Lemma 1.3.9, Satz 1.3.10 und der Voraussetzung folgt

$$\begin{aligned}
g(\mathsf{J}N_{\mathsf{J}}(\mathsf{J}X,Y),Z) &= g(N_{\mathsf{J}}(X,Y),Z)\\
&= -g\left(T^{\nabla}(X,Y),Z\right)-g\left(\mathsf{J}T^{\nabla}(\mathsf{J}X,Y),Z\right)\\
&\quad -g\left(\mathsf{J}T^{\nabla}(X,\mathsf{J}Y),Z\right)+g\left(T^{\nabla}(\mathsf{J}X,\mathsf{J}Y),Z\right)\\
&= -g\left(T^{\nabla}(X,Y),Z\right)+g\left(T^{\nabla}(\mathsf{J}X,Y),\mathsf{J}Z\right)\\
&\quad +g\left(T^{\nabla}(X,\mathsf{J}Y),\mathsf{J}Z\right)+g\left(T^{\nabla}(\mathsf{J}X,\mathsf{J}Y),Z\right)\\
&= -g\left(T^{\nabla}(X,Y),Z\right)+g\left(T^{\nabla}(Y,\mathsf{J}Z),\mathsf{J}X\right)\\
&\quad +g\left(T^{\nabla}(X,\mathsf{J}Y),\mathsf{J}Z\right)+g\left(T^{\nabla}(\mathsf{J}Y,Z),\mathsf{J}X\right)\\
&= -g\left(T^{\nabla}(X,Y),Z\right)-\omega\left(T^{\nabla}(Y,\mathsf{J}Z),X\right)\\
&\quad -\omega\left(T^{\nabla}(X,\mathsf{J}Y),Z\right)-\omega\left(T^{\nabla}(\mathsf{J}Y,Z),X\right)\ .
\end{aligned}$$

Mit $\mathrm{d}\omega=0$ erhalten wir dann aus Lemma 1.1.10

$$\begin{aligned}
g(\mathsf{J}N_{\mathsf{J}}(\mathsf{J}X,Y),Z) &= -g\left(T^{\nabla}(X,Y),Z\right)-\omega\left(T^{\nabla}(Y,\mathsf{J}Z),X\right)\\
&\quad +\omega\left(T^{\nabla}(Z,X),\mathsf{J}Y\right)\\
&= -g\left(T^{\nabla}(X,Y),Z\right)+g\left(T^{\nabla}(Y,\mathsf{J}Z),\mathsf{J}X\right)\\
&\quad +g\left(T^{\nabla}(Z,X),Y\right)\\
&= g\left(T^{\nabla}(\mathsf{J}X,Y),\mathsf{J}Z\right)\\
&= -g\left(\mathsf{J}T^{\nabla}(\mathsf{J}X,Y),Z\right)\ .
\end{aligned}$$

Es ergibt sich also $N_{\mathsf{J}}=-T^{\nabla}$. Nach Satz 1.3.11 kann dies nur dann der Fall sein, wenn

$$T^{\nabla}=N_{\mathsf{J}}=0$$

und somit J integrabel ist. □

2.2 Ricci-Tensoren

In diesem Abschnitt sollen verschiedene Definitionen des Ricci-Tensors zusammengetragen und die Beziehungen zwischen ihnen untersucht werden. Zunächst sei M eine beliebige Mannigfaltigkeit.

Definition 2.2.1 *Der Ricci-Tensor* $\mathrm{ric}^\nabla \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(2,0)}(M)\right)$ *zu einem* $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$ *ist durch*

$$\mathrm{ric}^\nabla(X,Y) := \mathrm{Tr}\left(Z \mapsto R^\nabla(Z,X)Y\right)$$

für $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *definiert.*

In der Riemannschen Geometrie wird ric^∇ insbesondere für den Fall betrachtet, dass ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang zu einer Riemannschen Metrik g auf M ist.

Definition 2.2.2 *Sei* (M, g) *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Ricci-Operator eines Zusammenhangs* $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$ *ist der durch*

$$\mathrm{ric}^\nabla(X,Y) = g\left(\mathrm{Ric}^\nabla(X), Y\right)$$

für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ *definierte Endomorphismus* $\mathrm{Ric}^\nabla \in \Gamma(\mathrm{End}\,(TM))$.

Bemerkung 2.2.3 Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$ und sei $(e_1, \ldots, e_m)$ ein Orthonormalreper von (M, g). Dann ist

$$\mathrm{ric}^\nabla(X,Y) = \sum_{i=1}^m g\left(R^\nabla(e_i, X)Y, e_i\right) .$$

Für einen metrischen Zusammenhang ∇ erhält man

$$\mathrm{Ric}^\nabla(X) = \sum_{i=1}^m R^\nabla(X, e_i)e_i .$$

□

Sei nun (M, ω) eine fast-symplektische Mannigfaltigkeit. Dann können wir wie folgt jedem Zusammenhang in einem Vektorbündel über M einen Ricci-Operator zuordnen.

Definition 2.2.4 *Sei* E *ein Vektorbündel über* M *und* $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ *ein symplektisches Reper auf* (M, ω). *Der symplektische Ricci-Operator zu einem Zusammenhang* $\nabla \in \mathcal{C}(E)$ *ist der durch*

$$\mathrm{sRic}^\nabla(\xi) := R^\nabla(\omega)\xi = \sum_{i=1}^n R^\nabla(e_i, f_i)\xi$$

für $\xi \in \Gamma(E)$ *definierte Schnitt* $\mathrm{sRic}^\nabla \in \Gamma(\mathrm{End}\,(E))$.

Betrachten wir den Spezialfall des Tangentialbündels über (M, ω), so erhalten wir den symplektischen Ricci-Tensor (vgl. [16]).

Definition 2.2.5 *Sei* $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$ *und* $\mathrm{sRic}^\nabla \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ *der symplektische Ricci-Operator zu* ∇*. Dann ist durch*

$$\mathrm{sric}^\nabla(X, Y) := \omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla(X), Y\right)$$

für $X, Y \in \Gamma(TM)$ *der symplektische Ricci-Tensor* $\mathrm{sric}^\nabla \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(2,0)}(M)\right)$ *gegeben.*

Mit einem symplektischen Reper $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ kann man den symplektischen Ricci-Tensor auch schreiben als

$$\mathrm{sric}^\nabla(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{S}^\nabla(e_i, f_i, X, Y) \quad \text{für} \quad X, Y \in \Gamma(TM)\,. \tag{2.2.1}$$

Ist J eine ω-verträgliche fast-komplexe Struktur auf (M, ω) und D der Levi-Civita-Zusammenhang der assoziierten Metrik g, so wird sric^D auch $*$-Ricci-Tensor der fast-Hermiteschen Mannigfaltigkeit (M, g, J) genannt.

Lemma 2.2.6 *Für jeden symplektischen Zusammenhang* ∇ *auf* (M, ω) *ist* sric^∇ *symmetrisch.*

Beweis. Dies folgt sofort aus (2.2.1) und Lemma 1.5.11. □

Nun wollen wir den Ricci- und den symplektischen Ricci-Tensor vergleichen.

Satz 2.2.7 *Sei* (M, ω) *eine fast-symplektische Mannigfaltigkeit,* ∇ *ein symplektischer Zusammenhang auf* M *und* $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ *ein symplektisches Reper. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sric}^\nabla(X, Y) - \mathrm{ric}^\nabla(X, Y) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\omega\left(T^\nabla\left(T^\nabla(e_i, f_i), X\right), Y\right) + \omega\left(\left(\nabla_X T^\nabla\right)(e_i, f_i), Y\right)\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \left(\omega\left(T^\nabla\left(T^\nabla(X, e_i), f_i\right), Y\right) + \omega\left(\left(\nabla_{f_i} T^\nabla\right)(X, e_i), Y\right)\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \left(\omega\left(T^\nabla\left(T^\nabla(f_i, X), e_i\right), Y\right) + \omega\left(\left(\nabla_{e_i} T^\nabla\right)(f_i, X), Y\right)\right)
\end{aligned}$$

für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Beweis. Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$, sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega)$ und $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ ein symplektisches Reper. Mit den Eigenschaften des symplektischen Krümmungstensors S^∇ aus Lemma 1.5.11 haben wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{ric}^\nabla(X, Y) &= \mathrm{Tr}\left(Z \mapsto R^\nabla(Z, X)Y\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\mathsf{S}^\nabla(e_i, X, Y, f_i) - \mathsf{S}^\nabla(f_i, X, Y, e_i)\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \left(\mathsf{S}^\nabla(X, e_i, f_i, Y) + \mathsf{S}^\nabla(f_i, X, e_i, Y)\right) \ .
\end{aligned}$$

Dann folgt aus der Bianchi-Identität (Satz 1.1.12) die Behauptung. □

Insbesondere haben wir

Folgerung 2.2.8 *Ist ∇ ein torsionsfreier symplektischer Zusammenhang, so gilt* $\mathrm{sric}^\nabla = \mathrm{ric}^\nabla$. □

Für den Levi-Civita-Zusammenhang D einer Kählerschen Mannigfaltigkeit (M, g, J) gilt demzufolge $\mathrm{ric}^D = \mathrm{sric}^D$.

Auch für den fast-Hermiteschen Fall sind Aussagen über die Beziehung zwischen ric^D und sric^D bekannt [26], welche wir nun herleiten wollen. Sei im Folgenden (M, g, J) eine fast-Hermitesche Mannigfaltigkeit.

Lemma 2.2.9 *Sei $L \in \Gamma(\mathrm{End}\,(TM))$. Dann gilt*

$$\left(\mathrm{d}^D DL\right)(X, Y) = R^D(X, Y) \circ L - L \circ R^D(X, Y) \quad \textit{für} \quad X, Y \in \Gamma(TM) \ .$$

Beweis. Für $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ und $L \in \Gamma(\mathrm{End}\,(TM))$ erhalten wir mittels Lemma 1.1.5

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{d}^D DL\right)(X, Y)Z &= (D_X D_Y L)\, Z - (D_Y D_X L)\, Z - \left(D_{[X,Y]} L\right) Z \\
&= D_X\left((D_Y L)\, Z\right) - (D_Y L)\,(D_X Z) \\
&\quad - D_Y\left((D_X L)\, Z\right) + (D_X L)\,(D_Y Z) - \left(D_{[X,Y]} L\right) Z \\
&= D_X D_Y(LZ) - D_X(L(D_Y Z)) - D_Y(L(D_X Z)) \\
&\quad + L(D_Y D_X Z) - D_Y D_X(LZ) + D_Y(L(D_X Z)) \\
&\quad + D_X(L(D_Y Z)) - L(D_X D_Y Z) \\
&\quad - D_{[X,Y]}(LZ) + L\left(D_{[X,Y]} Z\right) \\
&= D_X D_Y(LZ) - D_Y D_X(LZ) - D_{[X,Y]}(LZ) \\
&\quad - L(D_X D_Y Z) + L(D_Y D_X Z) + L\left(D_{[X,Y]} Z\right)
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Sei im Weiteren $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_{2n})$ ein unitäres Reper bezüglich J.

Lemma 2.2.10 *Für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ ist*

$$\operatorname{sric}^D(X,Y) = \sum_{i=1}^{2n} \operatorname{Riem}(\mathsf{e}_i, X, \mathsf{J}Y, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i)\ .$$

Beweis. Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$. Mit der J-Invarianz von g und den Eigenschaften von Riem aus Satz 1.2.6 haben wir

$$\sum_{i=1}^{2n} \operatorname{Riem}(\mathsf{e}_i, X, \mathsf{J}Y, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i) = -\sum_{i=1}^{2n} \operatorname{Riem}(\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i, X, \mathsf{J}Y, \mathsf{e}_i) = \sum_{i=1}^{2n} \operatorname{Riem}(\mathsf{J}Y, \mathsf{e}_i, X, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i)\ .$$

Dies und 4. aus Satz 1.2.6 liefern dann

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} \operatorname{Riem}(\mathsf{e}_i, X, \mathsf{J}Y, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \left(\operatorname{Riem}(\mathsf{e}_i, X, \mathsf{J}Y, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i) + \operatorname{Riem}(\mathsf{J}Y, \mathsf{e}_i, X, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \operatorname{Riem}(X, \mathsf{J}Y, \mathsf{e}_i, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i) \\
&= \operatorname{sric}^D(X,Y)\ .
\end{aligned}$$

□

Nun können wir die Differenz der beiden Ricci-Tensoren des Levi-Civita-Zusammenhangs D genauer charakterisieren.

Lemma 2.2.11 *Für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ gilt*

$$\operatorname{ric}^D(X, \mathsf{J}Y) - \operatorname{sric}^D(X, \mathsf{J}Y) = \sum_{i=1}^{2n} g\left(\left(\mathrm{d}^D D\mathsf{J}\right)(\mathsf{e}_i, X)Y, \mathsf{e}_i\right)\ .$$

Beweis. Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$. Dann folgt mittels Lemma 2.2.9 und Lemma 2.2.10

$$\begin{aligned}
\operatorname{ric}^D(X, \mathsf{J}Y) - \operatorname{sric}^D(X, \mathsf{J}Y) &= \operatorname{ric}^D(X, \mathsf{J}Y) + \sum_{i=1}^{2n} \operatorname{Riem}(\mathsf{e}_i, X, Y, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \left(g\left(R^D(\mathsf{e}_i, X)\mathsf{J}Y, \mathsf{e}_i\right) - g\left(\mathsf{J}R^D(\mathsf{e}_i, X)Y, \mathsf{e}_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} g\left(\left(\mathrm{d}^D D\mathsf{J}\right)(\mathsf{e}_i, X)Y, \mathsf{e}_i\right)\ .
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.2.12 *Sei* $\zeta \in \Omega^1(M, \operatorname{End}(TM))$. *Für alle* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *gilt*

$$\left(\mathrm{d}^D\zeta\right)(X,Y) = (D\zeta)(X,Y) - (D\zeta)(Y,X)\ .$$

Beweis. Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$ und sei $\zeta \in \Omega^1(M, \operatorname{End}(TM))$. Nach Lemma 1.1.5 haben wir dann

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{d}^D\zeta\right)(X,Y) &= D_X(\zeta(Y)) - D_Y(\zeta(X)) - \zeta([X,Y]) \\ &= D_X(\zeta(Y)) - D_Y(\zeta(X)) - \zeta\left(D_XY - D_YX\right) \\ &= (D_X\zeta)\,Y - (D_Y\zeta)\,X \\ &= (D\zeta)(X,Y) - (D\zeta)(Y,X)\ .\end{aligned}$$

□

Folgerung 2.2.13 *Für alle* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *gilt*

$$\operatorname{ric}^D(X, \mathsf{J}Y) - \operatorname{sric}^D(X, \mathsf{J}Y) = \sum_{i=1}^{2n} g\left((DD\mathsf{J})\left(\mathsf{e}_i, X\right)Y, \mathsf{e}_i\right)\ .$$

Beweis. Mit Hilfe der Lemmas 2.2.11 und 2.2.12 erhalten wir

$$\operatorname{ric}^D(X, \mathsf{J}Y) - \operatorname{sric}^D(X, \mathsf{J}Y) = \sum_{i=1}^{2n} \left(g\left((DD\mathsf{J})\left(\mathsf{e}_i, X\right)Y, \mathsf{e}_i\right) - g\left((DD\mathsf{J})\left(X, \mathsf{e}_i\right)Y, \mathsf{e}_i\right)\right)$$

für $X, Y \in \Gamma(TM)$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 1.4.15. □

Bevor wir eine andere Konstruktion des symplektischen Ricci-Tensors zu einem Hermiteschen Zusammenhang angeben können, benötigen wir noch einige vorbereitende Überlegungen.

Lemma 2.2.14 *Sei* $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega, \mathsf{J})$. *Dann ist* $\operatorname{sRic}^\nabla \in \Gamma\left(\operatorname{End}_+\left(TM, \mathsf{J}\right)\right)$ *und*

$$\operatorname{sric}^\nabla(\mathsf{J}X, \mathsf{J}Y) = \operatorname{sric}^\nabla(X,Y) \quad \textit{für} \quad X, Y \in \Gamma(TM)\ .$$

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz von Satz 1.3.4. □

Definition 2.2.15 *Die Ricci-Form* $\rho^\nabla \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(2,0)}(M)\right)$ *eines Hermiteschen Zusammenhangs* ∇ *auf* M *ist durch*

$$\rho^\nabla(X,Y) := \operatorname{sric}^\nabla(\mathsf{J}X, Y)$$

für $X, Y \in \Gamma(TM)$ *definiert.*

Lemma 2.2.16 *Sei* $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega, \mathsf{J})$. *Für die Ricci-Form* ρ^∇ *von* ∇ *gelten die folgenden Aussagen.*

1. $\rho^\nabla \in \Omega^2(M)$.
2. $\rho^\nabla(\mathsf{J}X, \mathsf{J}Y) = \rho^\nabla(X,Y)$ *für alle* $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Beweis. Beide Aussagen folgen direkt aus der Definition von ρ^∇ und den entsprechenden Eigenschaften von $\operatorname{sric}^\nabla$ aus Lemma 2.2.6 und Lemma 2.2.14. □

Wir betrachten nun zunächst ein Vektorbündel E über M vom Rang d und einen Zusammenhang ∇ in E. Zu E haben wir das Geradenbündel $\Lambda^d E$ und darin den von ∇ durch

$$\tilde{\nabla}_X(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_d) := \sum_{i=1}^{d} \xi_1 \wedge \ldots \wedge \nabla_X \xi_i \wedge \ldots \wedge \xi_d$$

für $X \in \Gamma(TM)$ und $\xi_1, \ldots, \xi_d \in \Gamma(E)$ induzierten Zusammenhang $\tilde{\nabla}$.

Lemma 2.2.17 *Für die Krümmung von ∇ in E und die Krümmung von $\tilde{\nabla}$ in $\Lambda^d E$ gilt*

$$R^{\tilde{\nabla}}(X,Y) = \operatorname{Tr}\left(\xi \mapsto R^{\nabla}(X,Y)\xi\right)$$

für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Beweis. Wir beweisen die Gleichheit in einem fixierten Punkt $x \in M$. Dazu seien $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $\xi_1, \ldots, \xi_d \in \Gamma(E)$ mit $(\nabla \xi_i)_x = 0$ für $i = 1, \ldots, d$ und $(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_d)_x \neq 0$. Dann gilt in x

$$\begin{aligned}
&R^{\tilde{\nabla}}(X,Y)(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_d) \\
&= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y (\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_d) - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X (\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_d) - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_d) \\
&= \tilde{\nabla}_X \left((\nabla_Y \xi_1) \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_d\right) + \cdots + \tilde{\nabla}_X \left(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{d-1} \wedge (\nabla_Y \xi_d)\right) \\
&\quad - \tilde{\nabla}_Y \left((\nabla_X \xi_1) \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_d\right) - \cdots - \tilde{\nabla}_Y \left(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{d-1} \wedge (\nabla_X \xi_d)\right) \\
&= (\nabla_X \nabla_Y \xi_1) \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_d + \cdots + \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{d-1} \wedge (\nabla_X \nabla_Y \xi_d) \\
&\quad - (\nabla_Y \nabla_X \xi_1) \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_d - \cdots - \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{d-1} \wedge (\nabla_Y \nabla_X \xi_d) \\
&= \left(R^{\nabla}(X,Y)\xi_1\right) \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_d + \cdots + \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{d-1} \wedge \left(R^{\nabla}(X,Y)\xi_d\right) .
\end{aligned}$$

Definieren wir $r_i^j \in \mathbb{R}$ für $i, j = 1, \ldots, d$ durch

$$\left(R^{\nabla}(X,Y)\xi_i\right)_x = \sum_{j=1}^{d} r_i^j \, (\xi_j)_x \ ,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}
R^{\tilde{\nabla}}(X,Y)(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_d) &= r_1^1 \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_d + \cdots + \xi_1 \wedge \ldots \wedge r_d^d \xi_d \\
&= \left(r_1^1 + \ldots + r_d^d\right) \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_d \\
&= \operatorname{Tr}\left(\xi \mapsto R^{\nabla}(X,Y)\xi\right) \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_d \, .
\end{aligned}$$

□

Das vorherige Lemma wenden wir nun auf unsere Situation an. Dafür benötigen wir die Überlegungen zur Aufspaltung des komplexifizierten Tangentialbündels $T_{\mathbb{C}}M$ aus Abschnitt 1.3. Sei ∇ ein Hermitescher Zusammenhang auf M. Dieser ist auch ein Zusammenhang in $T^{1,0}M$, denn es gilt

$$\nabla_X(Y - \mathrm{i}\mathsf{J}Y) = \nabla_X Y - \mathrm{i}\mathsf{J}\nabla_X Y \in \Gamma\left(T^{1,0}M\right)$$

für $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Für ein unitäres Reper $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_n)$ in TM ist

$$(\mathsf{e}_1 - \mathrm{i}\mathsf{J}\,\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n - \mathrm{i}\mathsf{J}\,\mathsf{e}_n)$$

ein Reper in $T^{1,0}M$. Das zugehörige duale Reper ist

$$\left(\frac{1}{2}g(\cdot, \mathsf{e}_1 + \mathrm{i}\mathsf{J}\,\mathsf{e}_1), \ldots, \frac{1}{2}g(\cdot, \mathsf{e}_n + \mathrm{i}\mathsf{J}\,\mathsf{e}_n)\right) \;,$$

denn es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}g(\mathsf{e}_i - \mathrm{i}\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_j + \mathrm{i}\mathsf{J}\,\mathsf{e}_j) &= \frac{1}{2}\left(g(\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_j) + \mathrm{i}g(\mathsf{e}_i, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_j) - \mathrm{i}g(\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_j) - \mathrm{i}^2 g(\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_j)\right)\\ &= g(\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_j)\\ &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

für $i, j = 1, \ldots, n$.

Satz 2.2.18 *Sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega, \mathsf{J})$ und $\tilde{\nabla}$ der von ∇ induzierte Zusammenhang in $\Lambda^n T^{1,0}M$. Dann gilt*

$$R^{\tilde{\nabla}}(X, Y) = -\mathrm{i} \cdot \rho^{\nabla}(X, Y)$$

für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Beweis. Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega, \mathsf{J})$. Dann gilt wegen Satz 1.3.4 und Lemma 2.2.17

$$\begin{aligned}R^{\tilde{\nabla}}(X, Y) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} g\left(R^{\nabla}(X, Y)(\mathsf{e}_i - \mathrm{i}\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i), \mathsf{e}_i + \mathrm{i}\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(g\left(R^{\nabla}(X, Y)\,\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_i\right) + \mathrm{i}g\left(R^{\nabla}(X, Y)\,\mathsf{e}_i, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i\right)\right)\\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{i}g\left(R^{\nabla}(X, Y)\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_i\right) - g\left(R^{\nabla}(X, Y)\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i\right)\right)\\ &= \mathrm{i}\sum_{i=1}^{n} g\left(R^{\nabla}(X, Y)\,\mathsf{e}_i, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i\right)\\ &= -\mathrm{i} \cdot \mathrm{sric}^{\nabla}(\mathsf{J}X, Y)\;.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

2.3 Skalarkrümmungen

Eng verbunden mit dem Begriff des Ricci-Tensors ist die Skalarkrümmung. Auch hier gibt es verschiedene Definitionen, welche wir nun zusammenstellen und vergleichen wollen. Dazu sei zunächst (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Definition 2.3.1 *Für einen Zusammenhang $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$ ist die Skalarkrümmung* $\mathrm{scal}^\nabla \in C^\infty(M)$ *durch*

$$\mathrm{scal}^\nabla := \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Ric}^\nabla\right)$$

gegeben.

Wir gehen wie in Abschnitt 2.2 vor und setzen nun (M, ω) als fast-symplektische Mannigfaltigkeit voraus.

Eine zur Riemannschen Skalarkrümmung analoge Definition der symplektischen Skalarkrümmung macht keinen Sinn, denn für jeden symplektischen Zusammenhang ∇ auf M gilt

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{sRic}^\nabla\right) = 0\ .$$

Tatsächlich haben wir mit einem symplektischen Reper $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ und den Eigenschaften des symplektischen Krümmungstensors aus Lemma 1.5.11

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{sRic}^\nabla\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla(e_i), f_i\right) - \omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla(f_i), e_i\right)\right)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\mathsf{S}^\nabla(e_j, f_j, e_i, f_i) - \mathsf{S}^\nabla(e_j, f_j, f_i, e_i)\right)\\ &= 0\ .\end{aligned}$$

Definition 2.3.2 [16] *Sei* $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$ *und* $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$*. Dann ist durch*

$$\mathrm{sscal}^{\nabla,\mathsf{J}} := \mathrm{Tr}\left(\mathsf{J} \circ \mathrm{sRic}^\nabla\right)$$

die symplektische Skalarkrümmung $\mathrm{sscal}^{\nabla,\mathsf{J}} \in C^\infty(M)$ *von* ∇ *bezüglich* J *gegeben.*

Lemma 2.3.3 *Sei* $(e_1, \ldots, e_{2n})$ *ein Orthonormalreper bezüglich der zu* $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$ *assoziierten Metrik* g*. Dann ist*

$$\mathrm{sscal}^{\nabla,\mathsf{J}} = \sum_{i=1}^{2n} \mathrm{sric}^\nabla(e_i, e_i)\ .$$

Beweis. Dies folgt sofort aus

$$\mathrm{Tr}\left(\mathsf{J} \circ \mathrm{sRic}^\nabla\right) = \sum_{i=1}^{2n} g\left(\mathsf{J} \circ \mathrm{sRic}^\nabla(e_i), e_i\right) = \sum_{i=1}^{2n} \omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla(e_i), e_i\right)\ .$$

□

Ist (M, g, J) eine fast-Hermitesche Mannigfaltigkeit und D der zugehörige Levi-Civita-Zusammenhang, so wird $\mathrm{sscal}^{D,\mathsf{J}}$ auch die $*$-Skalarkrümmung von (M, g, J) genannt.

Sei $\omega(K, L) \in C^\infty(M)$ für $K, L \in \Gamma(\mathrm{End}\,(TM))$ durch

$$\omega(K, L) := \sum_{i=1}^{2n} \omega\left(Ke_i, L\mathsf{J}^s e_i\right)$$

gegeben. Dabei ist $s = (e_1, \ldots, e_{2n})$ ein symplektisches Reper und J^s wie in Abschnitt 1.5. Die so definierte Fortsetzung von ω auf $\mathrm{End}\,(TM)$ ist nichtausgeartet. Außerdem ist sie symmetrisch, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\omega(K, L) &= \sum_{i=1}^{2n} \omega\left(Ke_i, L\mathsf{J}^s e_i\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{2n} \omega\left(K\mathsf{J}^s e_i, Le_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \omega\left(Le_i, K\mathsf{J}^s e_i\right) \\
&= \omega(L, K)\ .
\end{aligned}$$

Genauso schnell sieht man

$$\omega(K, L) = \omega(K\mathsf{J}, L\mathsf{J}) = \omega(\mathsf{J}K, \mathsf{J}L)$$

für jedes $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$.

Lemma 2.3.4 *Für $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$ und $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$ gilt*

$$\mathrm{sscal}^{\nabla,\mathsf{J}} = -\omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla, \mathsf{J}\right)\ .$$

Beweis. Sei $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$ und $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_{2n})$ ein unitäres Reper zu J. Dann folgt die Behauptung für alle $\nabla \in \mathcal{C}(TM)$ aus

$$\mathrm{Tr}\left(\mathsf{J} \circ \mathrm{sRic}^\nabla\right) = \sum_{i=1}^{2n} \omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla(\mathsf{e}_i), \mathsf{e}_i\right) = -\sum_{i=1}^{2n} \omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla(\mathsf{e}_i), \mathsf{J}\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i\right) = -\omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla, \mathsf{J}\right)\ .$$

□

Die nächsten beiden Sätze liefern alternative Definitionen der symplektischen Skalarkrümmung für Hermitesche Zusammenhänge. Dazu sei (M, g, J) als fast-Hermitesche Mannigfaltigkeit vorausgesetzt.

Satz 2.3.5 *Sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega, \mathsf{J})$. Dann gilt*

$$\mathrm{sscal}^{\nabla,\mathsf{J}} = 2\rho^\nabla(\omega) = 2\omega\left(\rho^\nabla, \omega\right)\ .$$

Beweis. Sei $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_{2n})$ ein unitäres Reper. Nach Definition ist

$$\rho^\nabla(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \rho^\nabla(\mathsf{e}_i, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i)\ .$$

Mit den Lemmas 2.2.14 und 2.3.3 sehen wir

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{n} \rho^\nabla(\mathsf{e}_i, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i) &= 2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{sric}^\nabla(\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(\mathrm{sric}^\nabla(\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_i) + \mathrm{sric}^\nabla(\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \mathrm{sric}^\nabla(\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_i) \\ &= \mathrm{sscal}^{\nabla,\mathsf{J}}\ . \end{aligned}$$

Die zweite der behaupteten Gleichungen ist offensichtlich. □

Satz 2.3.6 *Sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega, \mathsf{J})$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2}\mathrm{sscal}^{\nabla,\mathsf{J}}\omega^{(n)} = \rho^\nabla \wedge \omega^{(n-1)}\ .$$

Beweis. Sei wieder $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_{2n})$ ein unitäres Reper und sei $(\mathsf{e}^1, \ldots, \mathsf{e}^{2n})$ das dazu duale Reper. Dann ist

$$\omega^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{e}^1 \wedge \mathsf{J}\,\mathsf{e}^1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{e}^{i-1} \wedge \mathsf{J}\,\mathsf{e}^{i-1} \wedge \mathsf{e}^{i+1} \wedge \mathsf{J}\,\mathsf{e}^{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathsf{e}^n \wedge \mathsf{J}\,\mathsf{e}^n\ .$$

Damit und mit Satz 2.3.5 schließen wir

$$\begin{aligned} \rho^\nabla \wedge \omega^{(n-1)} &= \sum_{i=1}^{n} \rho^\nabla(\mathsf{e}_i, \mathsf{J}\,\mathsf{e}_i)\omega^{(n)} \\ &= \rho^\nabla(\omega)\omega^{(n)} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{sscal}^{\nabla,\mathsf{J}}\omega^{(n)}\ . \end{aligned}$$

□

Betrachtet man speziell die symplektische Skalarkrümmung des Chern-Zusammenhangs aus Beispiel 1.4.6, so spricht man von der Hermiteschen Skalarkrümmung der fast-Hermiteschen Mannigfaltigkeit (M, g, J). In [1] und [11] werden die beiden vorhergehenden Sätze für die Definition der Hermiteschen Skalarkrümmung benutzt.

Der Vollständigkeit halber leiten wir eine wohl bekannte Relation zwischen der Skalarkrümmung und der symplektischen Skalarkrümmung des Levi-Civita-Zusammenhangs D einer fast-Hermiteschen Mannigfaltigkeit (M, g, J) her.

Lemma 2.3.7 *Für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ gilt*

$$g\left(\left(D_X \mathsf{J}\right) Y, Z\right) = -g\left(Y, \left(D_X \mathsf{J}\right) Z\right) \ .$$

Beweis. Dies folgt sofort aus

$$\begin{aligned}
&g\left(D_X(\mathsf{J}Y), Z\right) - g\left(\mathsf{J}D_X Y, Z\right) \\
&= g\left(D_X(\mathsf{J}Y), Z\right) + g\left(D_X Y, \mathsf{J}Z\right) \\
&= X(g(\mathsf{J}Y, Z)) - g\left(\mathsf{J}Y, D_X Z\right) + X(g(Y, \mathsf{J}Z)) - g\left(Y, D_X(\mathsf{J}Z)\right) \\
&= -g\left(Y, D_X(\mathsf{J}Z)\right) + g\left(Y, \mathsf{J}D_X Z\right)
\end{aligned}$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. □

Sei im Weiteren $(e_1, \ldots, e_{2n})$ ein Orthonormalreper zu g. Wir benötigen noch

Lemma 2.3.8 *Es ist*

$$g\left(\delta^g \omega, \delta^g \omega\right) = \sum_{i,j=1}^{2n} g\left(\left(D_{e_i} \mathsf{J}\right) e_i, \left(D_{e_j} \mathsf{J}\right) e_j\right) \ .$$

Beweis. Nach den Lemmas 1.4.13 und 2.3.7 haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} \left(D_{e_i} \mathsf{J}\right) e_i &= \sum_{i,k=1}^{2n} g\left(\left(D_{e_i} \mathsf{J}\right) e_i, e_k\right) e_k \\
&= -\sum_{i,k=1}^{2n} g\left(\left(D_{e_i} \mathsf{J}\right) e_k, e_i\right) e_k \\
&= -\sum_{k=1}^{2n} \left(\delta^g \omega\right)(e_k) e_k
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{2n} g\left(\left(D_{e_i} \mathsf{J}\right) e_i, \left(D_{e_j} \mathsf{J}\right) e_j\right) &= g\left(\sum_{i=1}^{2n} \left(D_{e_i} \mathsf{J}\right) e_i, \sum_{j=1}^{2n} \left(D_{e_j} \mathsf{J}\right) e_j\right) \\
&= g\left(\sum_{k=1}^{2n} \left(\delta^g \omega\right)(e_k) e_k, \sum_{k=1}^{2n} \left(\delta^g \omega\right)(e_k) e_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \left(\delta^g \omega\right)(e_k) \left(\delta^g \omega\right)(e_k) \\
&= g\left(\left(\delta^g \omega\right), \left(\delta^g \omega\right)\right) \ .
\end{aligned}$$

□

Nach diesen Vorbetrachtungen können wir die Differenz der Skalarkrümmung und der symplektischen Skalarkrümmung des Levi-Civita-Zusammenhangs D wie folgt angeben.

Satz 2.3.9 *Für jede fast-Hermitesche Mannigfaltigkeit* (M, g, J) *gilt*

$$\mathrm{sscal}^{D,\mathsf{J}} - \mathrm{scal}^D = -2\delta^g \mathsf{J}\delta^g\omega - g\left(\delta^g\omega, \delta^g\omega\right) - g\left(\mathrm{d}\omega, \mathrm{d}\omega\right) + \frac{1}{2}g(D\mathsf{J}, D\mathsf{J})\ .$$

Beweis. Aus Lemma 2.2.9 erhalten wir

$$\left(\mathrm{d}^D D\mathsf{J}\right)(e_i, e_j) = R^D(e_i, e_j) \circ \mathsf{J} - \mathsf{J} \circ R^D(e_i, e_j)$$

für $i, j = 1, \ldots, 2n$. Daraus folgt

$$R^D(e_i, e_j)\mathsf{J}e_j = \left(D_{e_i}D_{e_j}\mathsf{J}\right)e_j - \left(D_{e_j}D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j - \left(D_{[e_i,e_j]}\mathsf{J}\right)e_j + \mathsf{J}\left(R^D(e_i, e_j)e_j\right)\ .$$

Dies, Lemma 2.2.10 und Lemma 2.3.3 implizieren

$$\begin{aligned}
\mathrm{sscal}^{D,\mathsf{J}} - \mathrm{scal}^D &= \sum_{i,j=1}^{2n} \left(g\left(R^D(e_i, e_j)\mathsf{J}e_j, \mathsf{J}e_i\right) - g\left(R^D(e_i, e_j)e_j, e_i\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2n} g\left(\left(D_{e_i}D_{e_j}\mathsf{J}\right)e_j - \left(D_{e_j}D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j - \left(D_{[e_i,e_j]}\mathsf{J}\right)e_j, \mathsf{J}e_i\right)\ .
\end{aligned}$$

Die weiteren Berechnungen erfolgen in einem Punkt $x \in M$. In einer Umgebung von x wählen wir ein Orthonormalreper $(e_1, \ldots, e_{2n})$ mit $(De_i)_x = 0$ für $i = 1, \ldots, 2n$. Dann gilt in $x \in M$

$$\begin{aligned}
\mathrm{sscal}^{D,\mathsf{J}} - \mathrm{scal}^D &= \sum_{i,j=1}^{2n} \left(g\left(\left(D_{e_i}D_{e_j}\mathsf{J}\right)e_j, \mathsf{J}e_i\right) - g\left(\left(D_{e_j}D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, \mathsf{J}e_i\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2n} \left(g\left(D_{e_i}\left(\left(D_{e_j}\mathsf{J}\right)e_j\right), \mathsf{J}e_i\right) - g\left(D_{e_j}\left(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j\right), \mathsf{J}e_i\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2n} \left(e_i\left(g\left(\left(D_{e_j}\mathsf{J}\right)e_j, \mathsf{J}e_i\right)\right) - g\left(\left(D_{e_j}\mathsf{J}\right)e_j, D_{e_i}(\mathsf{J}e_i)\right)\right) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{2n} \left(e_j\left(g\left(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, \mathsf{J}e_i\right)\right) - g\left(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, D_{e_j}(\mathsf{J}e_i)\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2n} \left(e_i\left(g\left(\left(D_{e_j}\mathsf{J}\right)e_j, \mathsf{J}e_i\right)\right) - g\left(\left(D_{e_j}\mathsf{J}\right)e_j, \left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_i\right)\right) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{2n} \left(e_j\left(g\left(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, \mathsf{J}e_i\right)\right) - g\left(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, \left(D_{e_j}\mathsf{J}\right)e_i\right)\right)\ .
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.3.7 und Vertauschung der Summation folgt daraus

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sscal}^{D,\mathsf{J}} - \mathrm{scal}^{D} = &\sum_{i,j=1}^{2n} \Big(e_i\Big(g\Big(\big(D_{e_j}\mathsf{J}\big)\,e_j, \mathsf{J}e_i\Big)\Big) - g\Big(\big(D_{e_j}\mathsf{J}\big)\,e_j, D_{e_i}(\mathsf{J}e_i)\Big)\Big) \\
&+ \sum_{i,j=1}^{2n} \Big(e_i\Big(g\Big(\big(D_{e_j}\mathsf{J}\big)\,e_j, \mathsf{J}e_i\Big)\Big) + g\Big(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, D_{e_j}(\mathsf{J}e_i)\Big)\Big)\ .
\end{aligned}
$$

Wir verwenden nun die Lemmas 1.4.13 und 2.3.8 und erhalten

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sscal}^{D,\mathsf{J}} - \mathrm{scal}^{D} &= \sum_{i,j=1}^{2n} \Big(g\Big(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, \big(D_{e_j}\mathsf{J}\big)\,e_i\Big) - 2e_i\left(\left(\delta^g\omega\right)\mathsf{J}e_i\right)\Big) - g\left(\delta^g\omega, \delta^g\omega\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2n} \Big(g\Big(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, \big(D_{e_j}\mathsf{J}\big)\,e_i\Big) + 2e_i\left(\left(\mathsf{J}\delta^g\omega\right)e_i\right)\Big) - g\left(\delta^g\omega, \delta^g\omega\right) \\
&= -2\delta^g\mathsf{J}\delta^g\omega - g\left(\delta^g\omega, \delta^g\omega\right) + \sum_{i,j=1}^{2n} g\Big(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, \big(D_{e_j}\mathsf{J}\big)\,e_i\Big)\ .
\end{aligned}
$$

Für den letzten Summand ergibt sich mit den Lemmas 1.4.8 und 2.3.7

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{2n} g\Big(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, \big(D_{e_j}\mathsf{J}\big)\,e_i\Big) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{2n} g\left(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, e_k\right) g\Big(\big(D_{e_j}\mathsf{J}\big)\,e_i, e_k\Big) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{2n} g\left(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, e_k\right)\left(\mathrm{d}\omega(e_j, e_i, e_k) - g\left(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_k, e_j\right) - g\left(\left(D_{e_k}\mathsf{J}\right)e_j, e_i\right)\right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{2n} g\left(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, e_k\right)\left(\mathrm{d}\omega(e_j, e_i, e_k) + g\left(e_k, \left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j\right) + g\left(e_j, \left(D_{e_k}\mathsf{J}\right)e_i\right)\right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{2n} g\left(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, e_k\right)\mathrm{d}\omega\left(e_j, e_i, e_k\right) + g(D\mathsf{J}, D\mathsf{J}) \\
&\quad - \sum_{i,j,k=1}^{2n} g\left(e_j, \left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_k\right) g\left(e_j, \left(D_{e_k}\mathsf{J}\right)e_i\right)
\end{aligned}
$$

und damit

$$
2\sum_{i,j=1}^{2n} g\Big(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, \big(D_{e_j}\mathsf{J}\big)\,e_i\Big) = \sum_{i,j,k=1}^{2n} g\left(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, e_k\right)\mathrm{d}\omega\left(e_j, e_i, e_k\right) + g(D\mathsf{J}, D\mathsf{J})\ .
$$

Die abschließende Überlegung mittels Vertauschung der Summation ist

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k=1}^{2n} g\left(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, e_k\right) \mathrm{d}\omega\left(e_j, e_i, e_k\right) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{2n} \Big(g\left(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, e_k\right) + g\left(\left(D_{e_j}\mathsf{J}\right)e_k, e_i\right) + g\left(\left(D_{e_k}\mathsf{J}\right)e_i, e_j\right)\Big) \mathrm{d}\omega(e_j, e_i, e_k) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{2n} \mathrm{d}\omega(e_i, e_j, e_k)\mathrm{d}\omega(e_j, e_i, e_k) \\
&= -2g(\mathrm{d}\omega, \mathrm{d}\omega)\ .
\end{aligned}
$$

Insgesamt haben wir

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sscal}^{D,\mathsf{J}} - \mathrm{scal}^{D} \\
&= -2\delta^g\mathsf{J}\delta^g\omega - g\left(\delta^g\omega, \delta^g\omega\right) + \frac{1}{2}g(D\mathsf{J}, D\mathsf{J}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{2n} g\left(\left(D_{e_i}\mathsf{J}\right)e_j, e_k\right)\mathrm{d}\omega\left(e_j, e_i, e_k\right) \\
&= -2\delta^g\mathsf{J}\delta^g\omega - g\left(\delta^g\omega, \delta^g\omega\right) + \frac{1}{2}g(D\mathsf{J}, D\mathsf{J}) - g(\mathrm{d}\omega, \mathrm{d}\omega)
\end{aligned}
$$

und damit die Behauptung. $\square$

Kapitel 3

Symplektische Yang-Mills-Theorie

In diesem Kapitel sollen Yang-Mills-artige Funktionale von Zusammenhängen in Vektorbündeln über einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) untersucht werden.

3.1 Vorbereitungen

Die Überlegungen zum symplektischen Hodge-Operator aus Abschnitt 1.5 motivieren eine allgemeinere Herangehensweise in Vektorbündeln.

Wir betrachten ein beliebiges reelles Vektorbündel E über (M, ω) und das zugehörige Endomorphismenbündel $\mathrm{End}\,(E)$. Weiterhin sei $\mathsf{b} \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$ eine Riemannsche oder symplektische Struktur in E. Dann kann b mit Hilfe eines Orthonormal- beziehungsweise eines symplektischen Repers auf $\mathrm{End}\,(E)$ fortgesetzt werden. Es ergibt sich, dass b auf jeder Faser $\mathrm{End}\,(E)_x$ eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform ist.

Wir wollen b jetzt auf k-Formen mit Werten in $\mathrm{End}\,(E)$ ausdehnen. Dabei wird, wie schon vorher, kein neues Symbol eingeführt, da aus dem Zusammenhang jeweils klar wird, welches b gemeint ist.

Definition 3.1.1 *Sei*

$$(\mu, \nu) \in \Omega^k(M, \mathrm{End}\,(E)) \times \Omega^l(M, \mathrm{End}\,(E)) \mapsto \mathsf{b}(\mu \wedge \nu) \in \Omega^{k+l}(M)$$

die durch

$$\mathsf{b}(\xi \otimes \varphi \wedge \chi \otimes \psi) := \mathsf{b}(\xi, \chi)\varphi \wedge \psi$$

für $\xi, \chi \in \Gamma(\mathrm{End}\,(E))$, $\varphi \in \Omega^k(M)$ und $\psi \in \Omega^l(M)$ definierte bilineare Abbildung.

Nutzt man noch die Fortsetzung von ω auf $\Omega^k(M)$, so führt dies auf eine weitere Abbildung.

Definition 3.1.2 *Sei*

$$(\mu_1,\mu_2)\in\Omega^k(M,\mathrm{End}\,(E))\times\Omega^k(M,\mathrm{End}\,(E))\mapsto \mathsf{b}(\mu_1,\mu_2)\in\Omega^0(M)$$

die durch

$$\mathsf{b}(\xi_1\otimes\varphi_1,\xi_2\otimes\varphi_2):=\mathsf{b}(\xi_1,\xi_2)\omega(\varphi_1,\varphi_2)$$

für $\xi_1,\xi_2\in\Gamma(\mathrm{End}\,(E))$ *und* $\varphi_1,\varphi_2\in\Omega^k(M)$ *definierte bilineare Abbildung.*

Mit Hilfe dieser beiden Abbildungen können wir nun einen Hodge-Operator auf den Formen mit Werten in $\mathrm{End}\,(E)$ definieren.

Definition 3.1.3 *Für* $k\in\{0,\dots,2n\}$ *sei*

$$*:\Omega^k(M,\mathrm{End}\,(E))\to\Omega^{2n-k}(M,\mathrm{End}\,(E))$$

der durch

$$\mathsf{b}(\mu_1,\mu_2)\omega^{(n)}=\mathsf{b}(\mu_1\wedge *\mu_2)\quad \textit{für alle}\quad \mu_1,\mu_2\in\Omega^k(M,\mathrm{End}\,(E))$$

definierte Homomorphismus.

Der gerade definierte Hodge-Operator lässt sich auf den symplektischen Hodge-Operator zurückführen und ist insbesondere ein Isomorphismus. Genauer gilt

Lemma 3.1.4 *Für alle* $\xi\in\Gamma(\mathrm{End}\,(E))$ *und* $\varphi\in\Omega^k(M)$ *ist*

$$*(\xi\otimes\varphi)=\xi\otimes *_\omega\varphi\ .$$

Beweis. Seien $\xi_1\otimes\varphi_1,\xi_2\otimes\varphi_2\in\Omega^k(M,\mathrm{End}\,(E))$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathsf{b}((\xi_1\otimes\varphi_1)\wedge *(\xi_2\otimes\varphi_2)) &= \mathsf{b}(\xi_1\otimes\varphi_1,\xi_2\otimes\varphi_2)\omega^{(n)}\\ &= \mathsf{b}(\xi_1,\xi_2)\omega(\varphi_1,\varphi_2)\omega^{(n)}\\ &= \mathsf{b}(\xi_1,\xi_2)\varphi_1\wedge *_\omega\varphi_2\\ &= \mathsf{b}((\xi_1\otimes\varphi_1)\wedge(\xi_2\otimes *_\omega\varphi_2))\ .\end{aligned}$$

Da $\xi_1\otimes\varphi_1$ beliebig gewählt war, folgt daraus die Behauptung. $\square$

Nun wollen wir Satz 1.5.15 auf $\Omega^2(M, \mathrm{End}\,(E))$ ausdehnen. Dafür benötigen wir noch die Fortsetzung von ω als bilineare Abbildung

$$(\mu, \varphi) \in \Omega^k(M, \mathrm{End}\,(E)) \times \Omega^k(M) \mapsto \omega(\mu, \varphi) \in \Gamma(\mathrm{End}\,(E)) \ .$$

Diese sei durch

$$\omega(\xi \otimes \varphi_1, \varphi_2) := \omega(\varphi_1, \varphi_2)\xi$$

für $\xi \in \Gamma(\mathrm{End}\,(E))$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega^k(M)$ definiert.

Folgerung 3.1.5 *Seien $\mu_1, \mu_2 \in \Omega^2(M, \mathrm{End}\,(E))$. Dann gilt*

$$\mathsf{b}(\mu_1 \wedge \mu_2) \wedge \omega^{(n-2)} = \left(\mathsf{b}(\omega(\mu_1, \omega), \omega(\mu_2, \omega)) - \mathsf{b}(\mu_1, \mu_2)\right) \omega^{(n)} \ .$$

Beweis. Wir können o.B.d.A. $\mu_1 = \xi_1 \otimes \varphi_1$ und $\mu_2 = \xi_2 \otimes \varphi_2$ annehmen. Mit Satz 1.5.15 folgt

$$\begin{aligned}
\mathsf{b}(\mu_1 \wedge \mu_2) \wedge \omega^{(n-2)} &= \mathsf{b}(\xi_1, \xi_2)\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \omega^{(n-2)} \\
&= \mathsf{b}(\xi_1, \xi_2) \left(\omega(\varphi_1, \omega)\omega(\varphi_2, \omega) - \omega(\varphi_1, \varphi_2)\right) \omega^{(n)} \\
&= \left(\mathsf{b}(\omega(\varphi_1, \omega)\xi_1, \omega(\varphi_2, \omega)\xi_2) - \mathsf{b}(\xi_1, \xi_2)\omega(\varphi_1, \varphi_2)\right) \omega^{(n)} \\
&= \left(\mathsf{b}(\omega(\mu_1, \omega), \omega(\mu_2, \omega)) - \mathsf{b}(\mu_1, \mu_2)\right) \omega^{(n)} \ .
\end{aligned}$$

□

Wir betrachten im Folgenden Zusammenhänge in E und deren induzierte Zusammenhänge in $\mathrm{End}\,(E)$.

Definition 3.1.6 *Sei $\mathcal{C}(E, \mathsf{b}) \subseteq \mathcal{C}(E)$ der Raum aller Zusammenhänge ∇ in E mit $\nabla\,\mathsf{b} = 0$.*

Im Weiteren sei immer $\nabla \in \mathcal{C}(E, \mathsf{b})$ vorausgesetzt.

Lemma 3.1.7 *Für alle $\mu \in \Omega^k(M, \mathrm{End}\,(E))$ und $\nu \in \Omega^l(M, \mathrm{End}\,(E))$ gilt*

$$\mathrm{d}(\mathsf{b}(\mu \wedge \nu)) = \mathsf{b}\left(\mathrm{d}^\nabla \mu \wedge \nu\right) + (-1)^k\, \mathsf{b}\left(\mu \wedge \mathrm{d}^\nabla \nu\right) \ .$$

Beweis. Seien $\xi, \chi \in \Gamma(\mathrm{End}\,(E))$. Wegen $\nabla \in \mathcal{C}(E, \mathsf{b})$ haben wir

$$\mathrm{d}\left(\mathsf{b}(\xi, \chi)\right)(X) = X(\mathsf{b}(\xi, \chi)) = \mathsf{b}\left(\nabla_X \xi, \chi\right) + \mathsf{b}\left(\xi, \nabla_X \chi\right) \quad \text{für alle} \quad X \in \Gamma(TM) \ ,$$

also

$$\mathrm{d}\left(\mathsf{b}(\xi, \chi)\right) = \mathsf{b}\left(\nabla \xi, \chi\right) + \mathsf{b}\left(\xi, \nabla \chi\right) \ .$$

Ist $\mu = \xi \otimes \varphi$ und $\nu = \chi \otimes \psi$, so gilt demnach

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathsf{b}(\mu \wedge \nu)) &= \mathrm{d}(\mathsf{b}(\xi, \chi)\varphi \wedge \psi) \\
&= \mathrm{d}\left(\mathsf{b}(\xi, \chi)\right) \wedge \varphi \wedge \psi + \mathsf{b}(\xi, \chi)\mathrm{d}\varphi \wedge \psi + (-1)^k\, \mathsf{b}(\xi, \chi)\varphi \wedge \mathrm{d}\psi \\
&= \mathsf{b}\left(\nabla\xi \wedge \chi\right) \wedge \varphi \wedge \psi + \mathsf{b}\left(\xi \wedge \nabla\chi\right) \wedge \varphi \wedge \psi \\
&\quad + \mathsf{b}(\xi, \chi)\mathrm{d}\varphi \wedge \psi + (-1)^k\, \mathsf{b}(\xi, \chi)\varphi \wedge \mathrm{d}\psi \\
&= \mathsf{b}\left(\nabla\xi \wedge \chi\right) \wedge \varphi \wedge \psi + \mathsf{b}(\xi, \chi)\mathrm{d}\varphi \wedge \psi \\
&\quad + (-1)^k \left(\varphi \wedge \mathsf{b}\left(\xi \wedge \nabla\chi\right) \wedge \psi + \mathsf{b}(\xi, \chi)\varphi \wedge \mathrm{d}\psi\right) \\
&= \mathsf{b}\left(\mathrm{d}^\nabla \mu \wedge \nu\right) + (-1)^k\, \mathsf{b}\left(\mu \wedge \mathrm{d}^\nabla \nu\right) \ .
\end{aligned}$$

□

Definition 3.1.8 *Sei die Abbildung*

$$\delta^\nabla : \Omega^{k+1}(M, \mathrm{End}\,(E)) \to \Omega^k(M, \mathrm{End}\,(E))$$

durch

$$\delta^\nabla = (-1)^{k+1} * \mathrm{d}^\nabla *$$

gegeben.

Der folgende Satz besagt, dass $\delta^\nabla : \Omega^{k+1}(M, \mathrm{End}\,(E)) \to \Omega^k(M, \mathrm{End}\,(E))$ der formal adjungierte Operator zu $\mathrm{d}^\nabla : \Omega^k(M, \mathrm{End}\,(E)) \to \Omega^{k+1}(M, \mathrm{End}\,(E))$ ist.

Satz 3.1.9 *Für alle $\mu \in \Omega^k(M, \mathrm{End}\,(E))$ und $\nu \in \Omega^{k+1}(M, \mathrm{End}\,(E))$ gilt*

$$\int_M \mathsf{b}\left(\mathrm{d}^\nabla \mu, \nu\right) \omega^{(n)} = \int_M \mathsf{b}\left(\mu, \delta^\nabla \nu\right) \omega^{(n)} \ .$$

Beweis. Nach Lemma 1.5.13 ist $** = \mathrm{id}$. Mit dem Satz von Stokes sowie Lemma 3.1.7 haben wir

$$\begin{aligned}
\int_M \mathsf{b}\left(\mathrm{d}^\nabla \mu, \nu\right) \omega^{(n)} &= \int_M \mathsf{b}\left(\mathrm{d}^\nabla \mu \wedge *\nu\right) \\
&= \int_M \mathrm{d}\left(\mathsf{b}\left(\mu \wedge *\nu\right)\right) - (-1)^k \int_M \mathsf{b}\left(\mu \wedge \mathrm{d}^\nabla * \nu\right) \\
&= (-1)^{k+1} \int_M \mathsf{b}\left(\mu \wedge * * \mathrm{d}^\nabla * \nu\right) \\
&= (-1)^{k+1} \int_M \mathsf{b}\left(\mu, *\mathrm{d}^\nabla * \nu\right) \omega^{(n)}
\end{aligned}$$

für $\mu \in \Omega^k(M, \mathrm{End}\,(E))$ und $\nu \in \Omega^{k+1}(M, \mathrm{End}\,(E))$. □

Weiterhin haben wir

Lemma 3.1.10 *Für alle* $\zeta \in \Omega^1(M, \mathrm{End}\,(E))$ *gilt*

$$\delta^\nabla \zeta = -\omega\left(\mathrm{d}^\nabla \zeta, \omega\right) \ .$$

Beweis. Sei $\zeta \in \Omega^1(M, \mathrm{End}\,(E))$. Nach Lemma 1.5.13 ist dann

$$*\zeta = \zeta \wedge \omega^{(n-1)} \ .$$

Mit $\mathrm{d}\omega = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\delta^\nabla \zeta &= - * \mathrm{d}^\nabla * \zeta \\
&= - * \mathrm{d}^\nabla \left(\zeta \wedge \omega^{(n-1)}\right) \\
&= - * \left(\mathrm{d}^\nabla \zeta \wedge \omega^{(n-1)}\right) \\
&= - * \left(\mathrm{d}^\nabla \zeta \wedge *_\omega \omega\right) \\
&= -\omega\left(\mathrm{d}^\nabla \zeta, \omega\right) *_\omega \omega^{(n)} \\
&= -\omega\left(\mathrm{d}^\nabla \zeta, \omega\right) \ .
\end{aligned}$$

□

3.2 Allgemeine Situation

Wir stellen uns jetzt die Frage, ob wir spezielle Zusammenhänge aus $\mathcal{C}(E, \mathsf{b})$ auszeichnen können. Mit Hilfe von R^∇, sRic^∇ und b definieren wir zwei Funktionale vom Yang-Mills-Typ und berechnen ihre Euler-Lagrange-Gleichungen.

Seien die Funktionale $I_j : \mathcal{C}(E, \mathsf{b}) \to \mathbb{R}$ für $j = 1, 2$ durch

$$I_1(\nabla) := \int_M \mathsf{b}\left(R^\nabla, R^\nabla\right) \omega^{(n)}$$

und

$$I_2(\nabla) := \int_M \mathsf{b}\left(\mathrm{sRic}^\nabla, \mathrm{sRic}^\nabla\right) \omega^{(n)}$$

gegeben. Dann haben wir

Satz 3.2.1 *Ein Zusammenhang* $\nabla \in \mathcal{C}(E, \mathsf{b})$ *ist genau dann ein kritischer Punkt von* I_1*, wenn* $\mathrm{d}^\nabla * R^\nabla = 0$.

Beweis. Sei $\nabla \in \mathcal{C}(E, \mathsf{b})$ und ∇^t eine Kurve in $\mathcal{C}(E, \mathsf{b})$ mit

$$\nabla^0 = \nabla \quad \text{und} \quad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla^t\right|_{t=0} = \zeta \in \Omega^1(M, \mathrm{End}\,(E)) \ .$$

Dann erhalten wir mittels Lemma 1.1.8 und Satz 3.1.9

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_1\left(\nabla^t\right)\Big|_{t=0} &= \int_M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathsf{b}\left(R^{\nabla^t}, R^{\nabla^t}\right)\Big|_{t=0} \omega^{(n)} \\
&= 2\int_M \mathsf{b}\left(\mathrm{d}^\nabla \zeta, R^\nabla\right) \omega^{(n)} \\
&= 2\int_M \mathsf{b}\left(\zeta, \delta^\nabla R^\nabla\right) \omega^{(n)} \\
&= 2\int_M \mathsf{b}\left(\zeta, *\mathrm{d}^\nabla * R^\nabla\right) \omega^{(n)} .
\end{aligned}$$

Da die Kurve und damit ζ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

Satz 3.2.2 *Die kritischen Punkte des Funktionals I_2 sind genau die Zusammenhänge $\nabla \in \mathcal{C}(E, \mathsf{b})$ mit $\nabla \mathrm{sRic}^\nabla = 0$.*

Beweis. Seien ∇ und ∇^t wie im Beweis von Satz 3.2.1. Leicht sieht man

$$\mathrm{sRic}^{\nabla^t} = \omega\left(R^{\nabla^t}, \omega\right) .$$

Mittels Lemma 1.1.8, Satz 3.1.9 und Lemma 3.1.10 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_2\left(\nabla^t\right)\Big|_{t=0} &= \int_M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathsf{b}\left(\omega\left(R^{\nabla^t}, \omega\right), \mathrm{sRic}^{\nabla^t}\right)\Big|_{t=0} \omega^{(n)} \\
&= 2\int_M \mathsf{b}\left(\omega\left(\mathrm{d}^\nabla\zeta, \omega\right), \mathrm{sRic}^\nabla\right) \omega^{(n)} \\
&= -2\int_M \mathsf{b}\left(\delta^\nabla\zeta, \mathrm{sRic}^\nabla\right) \omega^{(n)} \\
&= -2\int_M \mathsf{b}\left(\zeta, \mathrm{d}^\nabla \mathrm{sRic}^\nabla\right) \omega^{(n)} .
\end{aligned}$$

Da $\mathrm{sRic}^\nabla \in \Gamma(\mathrm{End}\,(E))$ und damit $\mathrm{d}^\nabla \mathrm{sRic}^\nabla = \nabla \mathrm{sRic}^\nabla$, folgt die Behauptung. □

Auf zwei verschiedenen Wegen zeigen wir jetzt, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen von I_1 und I_2 übereinstimmen. Dazu definieren wir das Funktional $I_3 : \mathcal{C}(E, \mathsf{b}) \to \mathbb{R}$ durch

$$I_3(\nabla) := \int_M \mathsf{b}\left(R^\nabla \wedge R^\nabla\right) \wedge \omega^{(n-2)} .$$

Satz 3.2.3 *Für alle $\nabla \in \mathcal{C}(E, \mathsf{b})$ gilt*

$$I_2(\nabla) - I_1(\nabla) = I_3(\nabla) .$$

Beweis. Aus Folgerung 3.1.5 erhalten wir für ein $\nabla \in \mathcal{C}(E, \mathsf{b})$

$$\begin{aligned} I_3(\nabla) &= \int_M \mathsf{b}\left(R^\nabla \wedge R^\nabla\right) \wedge \omega^{(n-2)} \\ &= \int_M \left(\mathsf{b}\left(\omega\left(R^\nabla, \omega\right), \omega\left(R^\nabla, \omega\right)\right) - \mathsf{b}\left(R^\nabla, R^\nabla\right)\right) \omega^{(n)} \\ &= \int_M \left(\mathsf{b}\left(\mathrm{sRic}^\nabla, \mathrm{sRic}^\nabla\right) - \mathsf{b}\left(R^\nabla, R^\nabla\right)\right) \omega^{(n)} \\ &= I_2(\nabla) - I_1(\nabla) \,. \end{aligned}$$

□

Satz 3.2.4 *Das Funktional $I_3 : \mathcal{C}(E, \mathsf{b}) \to \mathbb{R}$ ist konstant.*

Beweis. Seien ∇ und ∇^t wieder wie im Beweis von Satz 3.2.1. Mit Satz 1.1.7, Lemma 3.1.7 und dem Satz von Stokes erhalten wir

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_3\left(\nabla^t\right)\right|_{t=0} &= \left.\int_M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathsf{b}\left(R^{\nabla^t} \wedge R^{\nabla^t}\right) \wedge \omega^{(n-2)}\right|_{t=0} \\ &= 2 \int_M \mathsf{b}\left(\mathrm{d}^\nabla \zeta \wedge R^\nabla\right) \wedge \omega^{(n-2)} \\ &= 2 \int_M \mathrm{d}\left(\mathsf{b}\left(\zeta \wedge R^\nabla\right)\right) \wedge \omega^{(n-2)} \\ &= 2 \int_M \mathrm{d}\left(\mathsf{b}\left(\zeta \wedge R^\nabla\right) \wedge \omega^{(n-2)}\right) \\ &= 0 \,. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Folgerung 3.2.5 *Ein Zusammenhang $\nabla \in \mathcal{C}(E, \mathsf{b})$ genügt genau dann der Gleichung $\nabla \mathrm{sRic}^\nabla = 0$, wenn $\mathrm{d}^\nabla * R^\nabla = 0$ gilt.*

Beweis. Dies ist eine direkte Konsequenz aus den Sätzen 3.2.3 und 3.2.4. Dennoch wollen wir hier noch einen anderen Beweis angeben. Unter Beachtung von Lemma 3.1.4 erhalten wir aus Lemma 1.5.14

$$\begin{aligned} *R^\nabla &= \omega\left(R^\nabla, \omega\right) \otimes \omega^{(n-1)} - R^\nabla \wedge \omega^{(n-2)} \\ &= \mathrm{sRic}^\nabla \otimes \omega^{(n-1)} - R^\nabla \wedge \omega^{(n-2)} \,. \end{aligned}$$

Mit $\mathrm{d}\omega = 0$ und Satz 1.1.7 haben wir

$$\mathrm{d}^\nabla \left(R^\nabla \wedge \omega^{(n-2)}\right) = \left(\mathrm{d}^\nabla R^\nabla\right) \wedge \omega^{(n-2)} + R^\nabla \wedge \mathrm{d}\omega^{(n-2)} = 0 \,.$$

Es gilt also

$$\mathrm{d}^\nabla * R^\nabla = \mathrm{d}^\nabla \left(\mathrm{sRic}^\nabla \otimes \omega^{(n-1)}\right) = \nabla \mathrm{sRic}^\nabla \wedge \omega^{(n-1)} \,.$$

Mit Lemma 1.5.13 folgt

$$*\mathrm{d}^\nabla * R^\nabla = \nabla \mathrm{sRic}^\nabla$$

und daraus die Behauptung. □

3.3 Einschränkung auf torsionsfreie Zusammenhänge

Die vorherigen Überlegungen sollen nun spezieller weitergeführt werden. Dazu betrachten wir das Tangentialbündel TM einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω). Das zugehörige Endomorphismenbündel $\mathrm{End}\,(TM)$ sei versehen mit $\omega \in \Gamma\,(\mathrm{End}\,(TM)^* \otimes \mathrm{End}\,(TM)^*)$, wie in Abschnitt 2.3 angegeben. Weiter sei $s = (e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ ein symplektisches Reper und J^s wie in Abschnitt 1.5 definiert. Dann können wir s auch als unitäres Reper $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_{2n})$ bezüglich J^s auffassen.

Untersuchen wir nun die Funktionale aus Abschnitt 3.2 auf dem Raum $\mathcal{C}(TM, \omega)$ der symplektischen Zusammenhänge, so erhalten wir einen Spezialfall der dortigen Überlegungen mit den gleichen Euler-Lagrange-Gleichungen.

In [7] betrachten die Autoren die Einschränkungen der Funktionale I_1 und I_2 auf den Raum $\mathcal{C}_0(TM, \omega)$ der torsionsfreien symplektischen Zusammenhänge. Wir wollen die dort nur angegebenen Resultate hier beweisen. Bevor wir dies tun können, sind jedoch einige Vorbetrachtungen nötig.

Definition 3.3.1 *Die durch*

$$(\sigma a)(X, Y, Z) := \frac{1}{3}\left(a(X, Y, Z) + a(Y, Z, X) + a(Z, X, Y)\right)$$

für $a \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(3,0)}(M)\right)$ und $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ definierte Abbildung

$$\sigma : \Gamma\left(\mathcal{T}^{(3,0)}(M)\right) \to \Gamma\left(\mathcal{T}^{(3,0)}(M)\right)$$

heißt Bianchi-Projektor.

Lemma 3.3.2 *Sei $a \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(3,0)}(M)\right)$. Dann gilt genau dann $\sigma a = a$, wenn*

$$a(X, Y, Z) = a(Y, Z, X)$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Beweis. Seien $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ und sei $a \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(3,0)}(M)\right)$. Aus $\sigma a = a$ folgt sofort

$$a(X, Y, Z) = \frac{1}{3}\left(a(X, Y, Z) + a(Y, Z, X) + a(Z, X, Y)\right) = a(Y, Z, X)\,.$$

Sei nun umgekehrt

$$a(X, Y, Z) = a(Y, Z, X)\,.$$

Dann haben wir

$$(\sigma a)(X, Y, Z) = \frac{1}{3}\left(a(X, Y, Z) + a(Y, Z, X) + a(Z, X, Y)\right) = a(X, Y, Z)$$

und damit die Behauptung. □

Wir setzen $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM)$ auf $\Gamma\left(\mathcal{T}^{(3,0)}(M)\right)$ durch

$$(\mathsf{J}a)(X,Y,Z) := -a(\mathsf{J}X, \mathsf{J}Y, \mathsf{J}Z) \quad \text{für} \quad X,Y,Z \in \Gamma(TM),\ a \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(3,0)}(M)\right)$$

fort. Die folgenden Eigenschaften des Bianchi-Projektors rechnet man einfach nach.

Lemma 3.3.3 *1.* $\sigma \circ \sigma = \sigma$.

2. Für alle $a, b \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(3,0)}(M)\right)$ *gilt*

$$\omega(\sigma a, b) = \omega(a, \sigma b)\ .$$

3. Für jedes $a \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(3,0)}(M)\right)$ *und jede fast-komplexe Struktur* J *auf* M *gilt*

$$\sigma(\mathsf{J}a) = \mathsf{J}(\sigma a)\ .$$

□

Mit $\mathbf{T}^{3,0}_*(M)$ bezeichnen wir den Raum der $(3,0)$-Tensorfelder a mit

$$a(X,Y,Z) = a(X,Z,Y)$$

für alle $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$.

Lemma 3.3.4 $\mathbf{T}^{3,0}_*(M)$ *ist invariant unter* σ *und jedem* $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM)$.

Beweis. Sei $a \in \mathbf{T}^{3,0}_*(M)$ und $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\sigma a)(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\left(a(X,Y,Z) + a(Y,Z,X) + a(Z,X,Y)\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(a(X,Z,Y) + a(Y,X,Z) + a(Z,Y,X)\right)\\ &= (\sigma a)(X,Z,Y)\end{aligned}$$

und

$$(\mathsf{J}a)(X,Y,Z) = -a(\mathsf{J}X,\mathsf{J}Y,\mathsf{J}Z) = -a(\mathsf{J}X,\mathsf{J}Z,\mathsf{J}Y) = (\mathsf{J}a)(X,Z,Y)$$

für $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$. □

Sei

$$\sigma_* := \sigma\big|_{\mathbf{T}^{3,0}_*(M)} : \mathbf{T}^{3,0}_*(M) \to \mathbf{T}^{3,0}_*(M)\ .$$

Für den Unterraum $\mathbf{S}^{3,0}(M) \subseteq \mathbf{T}^{3,0}_*(M)$ der total symmetrischen $(3,0)$-Tensorfelder gilt dann

$$\mathbf{S}^{3,0}(M) = \left\{a \in \mathbf{T}^{3,0}_*(M)\ :\ \sigma_* a = a\right\}\ .$$

Genauer haben wir sogar

Lemma 3.3.5 *Es gilt*

$$\mathbf{S}^{3,0}(M) = \operatorname{im}\sigma_*\ .$$

Beweis. Sei zunächst $a \in \mathbf{S}^{3,0}(M)$ vorausgesetzt. Dann gilt nach Definition $\sigma_* a = a$, und damit $a \in \operatorname{im}\sigma_*$. Gilt umgekehrt $a \in \operatorname{im}\sigma_*$, so existiert ein $b \in \mathbf{T}^{3,0}_*(M)$ mit $\sigma_* b = a$. Mittels Lemma 3.3.3 haben wir dann

$$a = \sigma_* b = \sigma_* \circ \sigma_* b = \sigma_* a\ .$$

Die Behauptung ist damit bewiesen. □

Mit diesen Vorbetrachtungen erhalten wir

Satz 3.3.6 *Für $a \in \mathbf{T}_*^{3,0}(M)$ gilt genau dann $\sigma_* a = 0$, wenn*

$$\omega(\sigma_* b, a) = 0 \quad \textit{für alle} \quad b \in \mathbf{T}_*^{3,0}(M)\ .$$

Beweis. Sei $a \in \mathbf{T}_*^{3,0}(M)$ mit $\sigma_* a = 0$ und sei $b \in \mathbf{T}_*^{3,0}(M)$ beliebig. Dann folgt aus Lemma 3.3.3

$$\omega(\sigma_* b, a) = \omega(b, \sigma_* a) = 0\ .$$

Sei nun J eine ω-verträgliche fast-komplexe Struktur und $a \in \mathbf{T}_*^{3,0}(M)$ derart, dass

$$\omega(\sigma_* b, a) = 0 \quad \text{für alle} \quad b \in \mathbf{T}_*^{3,0}(M)\ .$$

Insbesondere gilt dann nach Lemma 3.3.3 und Lemma 3.3.4

$$0 = \omega(\sigma_*(\sigma_* \circ \mathsf{J}a), a) = \omega(\mathsf{J}(\sigma_* a), \sigma_* a) = -g(\sigma_* a, \sigma_* a)\ .$$

Folglich ist $\sigma_* a = 0$ und die zwei behaupteten Implikationen sind bewiesen. □

Mit diesem gewonnenen Wissen können wir uns nun wieder den Funktionalen aus [7] zuwenden. Dazu seien I_1^0 und I_2^0 die Einschränkungen der Funktionale I_1 und I_2 aus Abschnitt 3.2 auf $\mathcal{C}_0(TM, \omega)$.

Der Argumentation in den Beweisen zu den Sätzen 3.2.1 und 3.2.2 können wir auch für die Funktionale I_1^0 und I_2^0 folgen. Wir identifizieren $\Omega^1(M, \mathrm{End}\,(TM))$ mit $\Gamma\left(\mathcal{T}^{(3,0)}(M)\right)$ vermöge

$$a(X, Y, Z) = \omega(a(X)Y, Z) \quad \text{für} \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM)\ .$$

Nach Lemma 1.5.9 ist dann der Tangentialraum an $\mathcal{C}_0(TM, \omega)$ in jedem Punkt der Raum $\mathbf{S}^{3,0}(M)$.

Folgerung 3.3.7 *Ein Zusammenhang $\nabla \in \mathcal{C}_0(TM, \omega)$ ist genau dann ein kritischer Punkt des Funktionals I_1^0, wenn*

$$\int_M \omega\left(a, *\mathrm{d}^\nabla * R^\nabla\right) \omega^{(n)} = 0 \quad \textit{für alle} \quad a \in \mathbf{S}^{3,0}(M)\ .$$

Des Weiteren ist $\nabla \in \mathcal{C}_0(TM, \omega)$ genau dann ein kritischer Punkt von I_2^0, wenn

$$\int_M \omega\left(a, \nabla \mathrm{sRic}^\nabla\right) \omega^{(n)} = 0 \quad \textit{für alle} \quad a \in \mathbf{S}^{3,0}(M)\ .$$

□

In Folgerung 3.2.5 wurde $\nabla \mathrm{sRic}^\nabla = *\mathrm{d}^\nabla * R^\nabla$ gezeigt. Somit genügt es eine Bedingung für die beiden Funktionale I_1^0 und I_2^0 zu betrachten. Wir wählen die zweite.

Sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega)$, $L \in \Gamma(\mathrm{End}\,(TM))$ und sei $c \in \Gamma\left(\mathcal{T}^{(2,0)}(M)\right)$ durch

$$\omega(L(X), Y) = c(X, Y) \quad \text{für} \quad X, Y \in \Gamma(TM)$$

definiert. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
&\omega\left((\nabla_X L)\, Y, Z\right) \\
&= \omega\left(\nabla_X\left(L(Y)\right), Z\right) - \omega\left(L\left(\nabla_X Y\right), Z\right) \\
&= X\left(\omega\left(L(Y), Z\right)\right) - \omega\left(L\left(\nabla_X Y\right), Z\right) - \omega\left(L(Y), \nabla_X Z\right) \\
&= X\left(c(Y, Z)\right) - c\nabla\left(\nabla_X Y, Z\right) - c\left(Y, \nabla_X Z\right) \\
&= \left(\nabla_X c\right)(Y, Z)
\end{aligned}$$

für $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Insbesondere ist

$$\nabla \mathrm{sRic}^{\nabla}(X, Y, Z) = \left(\nabla_X \mathrm{sric}^{\nabla}\right)(Y, Z) \quad \text{für} \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM)\ .$$

Mit Lemma 2.2.6 folgt $\nabla\mathrm{sRic}^{\nabla} \in \mathbf{T}^{3,0}_{*}(M)$.

Satz 3.3.8 *Ein Zusammenhang $\nabla \in \mathcal{C}_0(TM, \omega)$ ist genau dann ein kritischer Punkt der Funktionale I^0_1 und I^0_2, wenn*

$$\sigma_*\left(\nabla \mathrm{sRic}^{\nabla}\right) = 0\ . \tag{3.3.1}$$

Beweis. Wegen Folgerung 3.3.7 und unter Beachtung von Folgerung 3.2.5 erhalten wir

$$\omega\left(a, \nabla \mathrm{sRic}^{\nabla}\right) = 0 \quad \text{für alle} \quad a \in \mathbf{S}^{3,0}(M)$$

als Bedingung dafür, dass $\nabla \in \mathcal{C}_0(TM, \omega)$ ein kritischer Punkt der Funktionale I^0_1 und I^0_2 ist. Diese ist nach Lemma 3.3.5 und wegen $\nabla\mathrm{sRic}^{\nabla} \in \mathbf{T}^{3,0}_{*}(M)$ zu

$$\omega\left(\sigma_* b, \nabla \mathrm{sRic}^{\nabla}\right) = 0 \quad \text{für alle} \quad b \in \mathbf{T}^{3,0}_{*}(M)$$

äquivalent. Benutzen wir nun noch Satz 3.3.6, so erhalten wir die Gleichung (3.3.1) als Euler-Lagrange-Gleichung der betrachteten Funktionale. □

Bemerkung 3.3.9 Wählt man die äquivalente Bedingung

$$\omega\left(a, *\mathrm{d}^{\nabla} * R^{\nabla}\right) = 0 \quad \text{für alle} \quad a \in \mathbf{S}^{3,0}(M)\ ,$$

so ergibt sich

$$\sigma_*\left(\delta^{\nabla} R^{\nabla}\right) = 0$$

als Euler-Lagrange-Gleichung. □

Kapitel 4

Der Raum der Hermiteschen Zusammenhänge

Ziel dieses Kapitels ist es für eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) einige Eigenschaften des Raumes der ω-verträglichen fast-komplexen Strukturen zu erarbeiten. Des Weiteren wird der Raum der Hermiteschen Zusammenhänge näher untersucht und Funktionale darauf betrachtet. Dazu sei (M, ω) als symplektische Mannigfaltigkeit vorausgesetzt.

4.1 Grundlegende Eigenschaften

In Abschnitt 1.4 haben wir für $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$ bereits das Bündel $\mathrm{End}_+(TM, \omega, \mathsf{J})$ eingeführt. In Analogie dazu definieren wir $\mathrm{End}_-(TM, \omega, \mathsf{J})$ durch

$$\Gamma\left(\mathrm{End}_-(TM, \omega, \mathsf{J})\right) := \{L \in \Gamma(\mathrm{End}\,(TM, \omega)) \ : \ \mathsf{J}L = -L\mathsf{J}\} \ .$$

Eine andere Sicht auf dieses Unterbündel des Endomorphismenbündels vermittelt

Satz 4.1.1 *Für jedes* $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$ *spaltet das Bündel* $\mathrm{End}\,(TM, \omega)$ *in*

$$\mathrm{End}\,(TM, \omega) = \mathrm{End}_+(TM, \omega, \mathsf{J}) \oplus \mathrm{End}_-(TM, \omega, \mathsf{J}) \tag{4.1.1}$$

auf. Diese Aufspaltung ist invariant unter J *und orthogonal bezüglich* ω *sowie bezüglich der zu* J *assoziierten Riemannschen Metrik* g.

Beweis. Sei $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$. Dann gilt für $L \in \Gamma(\mathrm{End}\,(TM, \omega))$

$$L = \frac{1}{2}(L - \mathsf{J}L\mathsf{J}) + \frac{1}{2}(L + \mathsf{J}L\mathsf{J})$$

mit $(L - \mathsf{J}L\mathsf{J}) \in \Gamma\left(\mathrm{End}_+(TM, \omega, \mathsf{J})\right)$ und $(L + \mathsf{J}L\mathsf{J}) \in \Gamma\left(\mathrm{End}_-(TM, \omega, \mathsf{J})\right)$. Die Zerlegung ist somit gezeigt. Für die weiteren Überlegungen seien nun $K \in \Gamma\left(\mathrm{End}_+(TM, \omega, \mathsf{J})\right)$ und $L \in \Gamma\left(\mathrm{End}_-(TM, \omega, \mathsf{J})\right)$. Wir haben dann

$$(\mathsf{J}K)\mathsf{J} = \mathsf{J}(\mathsf{J}K) \quad \text{und} \quad (K\mathsf{J})\mathsf{J} = \mathsf{J}(K\mathsf{J}) \ ,$$

woraus $\mathsf{J}K \in \Gamma\left(\mathrm{End}_+\left(TM,\omega,\mathsf{J}\right)\right)$ und $K\mathsf{J} \in \Gamma\left(\mathrm{End}_+\left(TM,\omega,\mathsf{J}\right)\right)$ folgen. Die J-Invarianz von $\mathrm{End}_-\left(TM,\omega,\mathsf{J}\right)$ sieht man genauso. Es bleibt nur noch die Orthogonalität der Aufspaltung zu zeigen. Dazu sei $(\mathsf{e}_1,\ldots,\mathsf{e}_{2n})$ ein unitäres Reper zu J. Wir schließen

$$\begin{aligned}\omega(K,L) &= \sum_{i=1}^{2n}\omega(K\,\mathsf{e}_i, L\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i)\\ &= -\sum_{i=1}^{2n}\omega(K\,\mathsf{e}_i, \mathsf{J}L\,\mathsf{e}_i)\\ &= \sum_{i=1}^{2n}\omega(\mathsf{J}K\,\mathsf{e}_i, L\,\mathsf{e}_i)\\ &= \sum_{i=1}^{2n}\omega(K\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i, L\,\mathsf{e}_i)\\ &= -\sum_{i=1}^{2n}\omega(K\,\mathsf{e}_i, L\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i)\ .\end{aligned}$$

Damit ist $\omega(K,L)=0$. Leicht sehen wir

$$g(K,L) = -\omega(K,\mathsf{J}L\mathsf{J})\ .$$

Da $\mathsf{J}L\mathsf{J} \in \Gamma\left(\mathrm{End}_-\left(TM,\omega,\mathsf{J}\right)\right)$, folgt $g(K,L)=0$. □

Bemerkung 4.1.2 Offensichtlich gilt für jede ω-verträgliche fast-komplexe Struktur J auf (M,ω) auch $\mathsf{J} \in \Gamma\left(\mathrm{End}_+\left(TM,\omega,\mathsf{J}\right)\right)$. □

Für spätere Rechnungen wollen wir das Tangentialbündel von $\mathcal{J}(TM,\omega)$ genauer charakterisieren.

Lemma 4.1.3 *Sei $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM,\omega)$. Dann gilt*

$$T_{\mathsf{J}}\mathcal{J}(TM,\omega) = \Gamma\left(\mathrm{End}_-\left(TM,\omega,\mathsf{J}\right)\right)\ .$$

Beweis. Wir betrachten eine Kurve J^t in $\mathcal{J}(TM,\omega)$ mit

$$\mathsf{J}^0 = \mathsf{J} \quad \text{und} \quad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{J}^t\right|_{t=0} = L \in \Gamma(\mathrm{End}\,(TM))\ .$$

Wegen $\mathsf{J}^t\mathsf{J}^t = -\mathrm{id}_{TM}$ gilt dann

$$L\mathsf{J} = -\mathsf{J}L\ .$$

Weiter haben wir

$$\omega\left(\mathsf{J}^tX,\mathsf{J}^tY\right) = \omega(X,Y) \quad \text{für alle} \quad X,Y \in \Gamma(TM)$$

und

$$\begin{aligned}\omega(LX, \mathsf{J}Y) + \omega(\mathsf{J}X, LY) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \omega(\mathsf{J}LX, Y) = \omega(\mathsf{J}X, LY)\\ &\Leftrightarrow \quad -\omega(L\mathsf{J}X, Y) = \omega(\mathsf{J}X, LY)\\ &\Leftrightarrow \quad \omega(LX, Y) = -\omega(X, LY)\end{aligned}$$

für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$. Die Behauptung ist damit gezeigt. □

Wir setzen

$$\mathcal{B}(TM, \omega) := \{(\mathsf{J}, \nabla) \in \mathcal{J}(TM, \omega) \times \mathcal{C}(TM, \omega) \ : \ \nabla \mathsf{J} = 0\}$$

und sehen sofort, dass $(\mathsf{J}, \nabla) \in \mathcal{B}(TM, \omega)$ genau dann gilt, wenn ∇ ein Hermitescher Zusammenhang bezüglich J ist.

Lemma 4.1.4 *Für jeden Zusammenhang $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega)$ und jedes $L \in \Gamma(\mathrm{End}\,(TM, \omega))$ gilt $\nabla L \in \Omega^1(M, \mathrm{End}\,(TM, \omega))$.*

Beweis. Seien $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega)$ und $L \in \Gamma(\mathrm{End}\,(TM, \omega))$. Dann folgt die Behauptung sofort aus

$$\begin{aligned}\omega\left((\nabla_X L)Y, Z\right) &= \omega\left(\nabla_X(LY), Z\right) - \omega\left(L\left(\nabla_X Y\right), Z\right)\\ &= X(\omega(LY, Z)) - \omega\left(LY, \nabla_X Z\right) + \omega\left(\nabla_X Y, LZ\right)\\ &= X(\omega(LY, Z)) + \omega\left(Y, L\left(\nabla_X Z\right)\right) + X(\omega(Y, LZ)) - \omega\left(Y, \nabla_X(LZ)\right)\\ &= -\left(\omega\left(Y, \nabla_X(LZ)\right) - \omega\left(Y, L\left(\nabla_X Z\right)\right)\right)\\ &= -\omega\left(Y, \left(\nabla_X L\right) Z\right)\end{aligned}$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. □

Der nächste Satz besagt, dass jeder Hermitesche Zusammenhang die Aufspaltung (4.1.1) invariant lässt.

Satz 4.1.5 *Sei $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$ und $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega, \mathsf{J})$. Für jedes $K \in \Gamma\left(\mathrm{End}_+\left(TM, \omega, \mathsf{J}\right)\right)$ und jedes $L \in \Gamma\left(\mathrm{End}_-\left(TM, \omega, \mathsf{J}\right)\right)$ gilt dann*

$$\nabla K \in \Omega^1\left(M, \mathrm{End}_+\left(TM, \omega, \mathsf{J}\right)\right) \quad \textit{und} \quad \nabla L \in \Omega^1\left(M, \mathrm{End}_-\left(TM, \omega, \mathsf{J}\right)\right) .$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für $K \in \Gamma\left(\mathrm{End}_+\left(TM, \omega, \mathsf{J}\right)\right)$, da der zweite Teil analog behandelt werden kann. Sei $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega, \mathsf{J})$. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 4.1.4 und

$$\begin{aligned}\left(\nabla_X K\right)(\mathsf{J}Y) &= \nabla_X(K\mathsf{J}Y) - K\left(\nabla_X(\mathsf{J}Y)\right)\\ &= \nabla_X(\mathsf{J}KY) - K\mathsf{J}\left(\nabla_X Y\right)\\ &= \mathsf{J}\left(\nabla_X(KY)\right) - \mathsf{J}K\left(\nabla_X Y\right)\\ &= \mathsf{J}\left(\left(\nabla_X K\right) Y\right)\end{aligned}$$

für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$. □

Folgerung 4.1.6 *Für alle* $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$ *und alle* $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega, \mathsf{J})$ *ist* $\nabla \mathrm{sRic}^{\nabla} \in \Omega^1\left(M, \mathrm{End}_+\left(TM, \omega, \mathsf{J}\right)\right)$.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus Lemma 2.2.14 und Satz 4.1.5. □

Sei im Folgenden $\mathcal{E}(TM, \omega)$ der Raum aller Endomorphismen $L \in \Gamma(\mathrm{End}\,(TM))$ mit

$$\omega(LX, LY) = \omega(X, Y) \quad \text{für alle} \quad X, Y \in \Gamma(TM)\ .$$

Für den Beweis des nächsten Satzes verweisen wir auf [2].

Satz 4.1.7 *Die Menge* $\mathcal{E}(TM, \omega)$ *ist eine Fréchet-Lie-Gruppe. Die zugehörige Lie-Algebra ist* $\Gamma(\mathrm{End}\,(TM, \omega))$. □

$\mathcal{J}(TM, \omega)$ ist invariant unter Konjugation mit Elementen aus $\mathcal{E}(TM, \omega)$. Genauer gilt

Lemma 4.1.8 *Seien* $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$ *und* $L \in \mathcal{E}(TM, \omega)$ *beliebig. Dann ist auch* $L^{-1}\mathsf{J}L \in \mathcal{J}(TM, \omega)$.

Beweis. Für $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$, $L \in \mathcal{E}(TM, \omega)$ und $X, Y \in \Gamma(TM)$ gelten

$$L^{-1}\mathsf{J}LL^{-1}\mathsf{J}L = -\mathrm{id}_{TM}$$

und

$$\omega(X, L^{-1}\mathsf{J}LY) = \omega(LX, \mathsf{J}(LY))\ .$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Auch der Raum der symplektischen Zusammenhänge ist unter dieser Konjugation invariant. Es gilt nämlich

Lemma 4.1.9 *Für jeden symplektischen Zusammenhang* $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega)$ *und jedes* $L \in \mathcal{E}(TM, \omega)$ *ist* $L^{-1}\nabla L \in \mathcal{C}(TM, \omega)$.

Beweis. Offensichtlich ist $L^{-1}\nabla L \in \mathcal{C}(TM)$ für $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega)$ und $L \in \mathcal{E}(TM, \omega)$. Die Behauptung folgt dann aus

$$\begin{aligned}
\omega\left(L^{-1}\nabla_X(LY), Z\right) + \omega\left(Y, L^{-1}\nabla_X(LZ)\right) &= \omega\left(\nabla_X(LY), LZ\right) + \omega\left(LY, \nabla_X(LZ)\right) \\
&= X(\omega(LY, LZ)) \\
&= X(\omega(Y, Z))
\end{aligned}$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. □

Die vorhergehenden Überlegungen können wir zusammenfassen und auf $\mathcal{B}(TM, \omega)$ anwenden.

Satz 4.1.10 *Sei* $(\mathsf{J}, \nabla) \in \mathcal{B}(TM, \omega)$ *und sei* $L \in \mathcal{E}(TM, \omega)$. *Dann gilt auch*

$$\left(L^{-1}\mathsf{J}L, L^{-1}\nabla L\right) \in \mathcal{B}(TM, \omega) \ .$$

Beweis. Für $(\mathsf{J}, \nabla) \in \mathcal{B}(TM, \omega)$ und $L \in \mathcal{E}(TM, \omega)$ haben wir mittels Lemma 4.1.8 und Lemma 4.1.9

$$\left(L^{-1}\mathsf{J}L, L^{-1}\nabla L\right) \in \mathcal{J}(TM, \omega) \times \mathcal{C}(TM, \omega) \ .$$

Die Behauptung folgt nun aus

$$L^{-1}\nabla_X(LL^{-1}\mathsf{J}LY) = L^{-1}\mathsf{J}\nabla_X(LY) = L^{-1}\mathsf{J}LL^{-1}\nabla_X(LY)$$

für $X, Y \in \Gamma(TM)$. □

Wir haben die nötigen Voraussetzungen geschaffen um einzusehen, dass

$$\begin{aligned} \mathsf{J} \cdot L &:= L^{-1}\mathsf{J}L && \text{für} \quad \mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega) \ , \\ \nabla \cdot L &:= L^{-1}\nabla L && \text{für} \quad \nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega) \quad \text{und} \\ (\mathsf{J}, \nabla) \cdot L &:= \left(L^{-1}\mathsf{J}L, L^{-1}\nabla L\right) && \text{für} \quad (\mathsf{J}, \nabla) \in \mathcal{B}(TM, \omega) \end{aligned}$$

Rechtswirkungen von $\mathcal{E}(TM, \omega)$ auf $\mathcal{J}(TM, \omega)$, $\mathcal{C}(TM, \omega)$ und $\mathcal{B}(TM, \omega)$ definieren.

Satz 4.1.11 *Die Rechtswirkung von* $\mathcal{E}(TM, \omega)$ *auf* $\mathcal{J}(TM, \omega)$ *ist transitiv.*

Beweis. Dies folgt aus der entsprechenden Aussage für symplektische Vektorräume (vgl. [23]) und daraus, dass $\mathcal{J}(TM, \omega)$ nach Satz 1.5.17 wegzusammenhängend ist. □

Sei $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$ und sei $\mathcal{E}(TM, \omega, \mathsf{J})$ die Isotropiegruppe von J zur Wirkung von $\mathcal{E}(TM, \omega)$ auf $\mathcal{J}(TM, \omega)$, das heißt

$$\mathcal{E}(TM, \omega, \mathsf{J}) = \{L \in \mathcal{E}(TM, \omega) \ : \ L\mathsf{J} = \mathsf{J}L\} \ .$$

Offensichtlich ist $\Gamma\left(\mathrm{End}_+\left(TM, \omega, \mathsf{J}\right)\right)$ die Lie-Algebra zu $\mathcal{E}(TM, \omega, \mathsf{J})$.

Satz 4.1.12 *Der Raum aller* ω*-verträglichen fast-komplexen Strukturen ist eine Fréchet-Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Sei $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$ und $U \subseteq \Gamma\left(\mathrm{End}_-\left(TM, \omega, \mathsf{J}\right)\right)$ eine genügend kleine Umgebung von $0 \in \Gamma\left(\mathrm{End}_-\left(TM, \omega, \mathsf{J}\right)\right)$. Wegen Satz 4.1.1 ist dann die Abbildung

$$L \in U \mapsto \exp(-L)\mathsf{J}\exp(L) \in \mathcal{J}(TM, \omega)$$

eine Parametrisierung von $\mathcal{J}(TM, \omega)$ um J. Der Rest ist Standard (vgl. [2]). □

Satz 4.1.13 *$\mathcal{B}(TM,\omega)$ ist eine Fréchet-Mannigfaltigkeit. Des Weiteren definiert*

$$\pi(\mathsf{J},\nabla) = \mathsf{J} \quad \textit{für} \quad (\mathsf{J},\nabla) \in \mathcal{B}(TM,\omega)$$

eine Faserung $\pi : \mathcal{B}(TM,\omega) \to \mathcal{J}(TM,\omega)$ in affine Räume.

Beweis. Sei $(\mathsf{J},\nabla) \in \mathcal{B}(TM,\omega)$ und $U \subseteq \Gamma\left(\mathrm{End}_-\left(TM,\omega,\mathsf{J}\right)\right)$ wie im Beweis von Satz 4.1.12. Nach Satz 4.1.10 ist dann

$$\Phi : U \times \Omega^1\left(M, \mathrm{End}_+\left(TM,\omega,\mathsf{J}\right)\right) \to \mathcal{B}(TM,\omega)\ ,$$

definiert durch

$$\Phi(L,\zeta) := \left(\exp(-L)\mathsf{J}\exp(L), \exp(-L)(\nabla+\zeta)\exp(L)\right)\ ,$$

eine Parametrisierung von $\pi^{-1}(U)$. Dies und Satz 1.4.10 liefern die Behauptung. □

Satz 4.1.14 *Die Faserung $\pi : \mathcal{B}(TM,\omega) \to \mathcal{J}(TM,\omega)$ ist trivial.*

Beweis. Für jedes $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM,\omega)$ betrachten wir die zugehörige fast-Kählersche Mannigfaltigkeit (M,g,J). Darauf stimmen die drei Hermiteschen Zusammenhänge aus Beispiel 1.4.6 überein und liefern einen globalen Schnitt in $\pi : \mathcal{B}(TM,\omega) \to \mathcal{J}(TM,\omega)$. □

Abschließend wollen wir noch eine Aussage über das Tangentialbündel von $\mathcal{B}(TM,\omega)$ machen.

Lemma 4.1.15 *Sei $(\mathsf{J},\nabla) \in \mathcal{B}(TM,\omega)$, $L \in \Gamma(\mathrm{End}\,(TM))$ und sei weiter $\zeta \in \Omega^1(M,\mathrm{End}\,(TM))$. Dann gilt genau dann*

$$(L,\zeta) \in T_{(\mathsf{J},\nabla)}\mathcal{B}(TM,\omega)\ ,$$

wenn

$$\nabla_X L = \mathsf{J}\zeta(X) - \zeta(X)\mathsf{J} \quad \textit{für alle} \quad X \in \Gamma(TM)\ .$$

Beweis. Sei (J^t,∇^t) eine Kurve in $\mathcal{B}(TM,\omega)$ mit $(\mathsf{J}^t,\nabla^t) = (\mathsf{J},\nabla)$ und

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathsf{J}^t,\nabla^t\right)\right|_{t=0} = (L,\zeta) \in \Gamma\left(\mathrm{End}_-\left(TM,\omega,\mathsf{J}\right)\right) \times \Omega^1(M,\mathrm{End}\,(TM,\omega))\ .$$

Für $X,Y \in \Gamma(TM)$ folgt die Behauptung dann aus

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\nabla^t_X \mathsf{J}^t\right) Y\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\nabla^t_X\left(\mathsf{J}^t Y\right) - \mathsf{J}^t\left(\nabla^t_X Y\right)\right)\right|_{t=0} \\
&= \zeta(X)\mathsf{J}Y + \nabla_X(LY) - L\left(\nabla_X Y\right) - \mathsf{J}\zeta(X)Y \\
&= \zeta(X)\mathsf{J}Y - \mathsf{J}\zeta(X)Y + \left(\nabla_X L\right)Y\ .
\end{aligned}$$

□

Folgerung 4.1.16 *Die Abbildung*

$$(\mathsf{J},\nabla)\in\mathcal{B}(TM,\omega)\mapsto\left(0,\nabla\mathrm{sRic}^{\nabla}\right)\in\Gamma\left(\mathrm{End}_-\left(TM,\omega,\mathsf{J}\right)\right)\times\Omega^1(M,\mathrm{End}\left(TM,\omega\right))$$

ist ein vertikales Vektorfeld auf $\mathcal{B}(TM,\omega)$.

Beweis. Das ist eine Konsequenz von Folgerung 4.1.6, Satz 4.1.10 und Lemma 4.1.15. □

4.2 Funktionale auf dem Raum Hermitescher Zusammenhänge

Auf $\mathcal{B}(TM,\omega)$ betrachten wir nun die folgenden Funktionale, welche aber keine interessanten kritischen Punkte liefern.

Seien $I_j:\mathcal{B}(TM,\omega)\to\mathbb{R}$ für $j=4,5,6$ durch

$$I_4(\mathsf{J},\nabla):=\int_M \mathrm{sscal}^{\nabla,\mathsf{J}}\omega^{(n)}\ ,$$

$$I_5(\mathsf{J},\nabla):=\int_M \omega\left(\mathrm{sRic}^{\nabla},\mathsf{J}\circ\mathrm{sRic}^{\nabla}\right)\omega^{(n)}$$

und

$$I_6(\mathsf{J},\nabla):=\int_M \omega\left(\mathrm{sRic}^{\nabla},\mathrm{sRic}^{\nabla}\right)\omega^{(n)}$$

definiert.

Satz 4.2.1 *Die Abbildung $I_4:\mathcal{B}(TM,\omega)\to\mathbb{R}$ ist konstant.*

Beweis. Sei (J^t,∇^t) eine glatte Kurve in $\mathcal{B}(TM,\omega)$ mit

$$\left(\mathsf{J}^0,\nabla^0\right)=(\mathsf{J},\nabla)$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathsf{J}^t,\nabla^t\right)\Big|_{t=0}=(L,\zeta)\in\Gamma\left(\mathrm{End}_-\left(TM,\omega,\mathsf{J}\right)\right)\times\Omega^1\left(M,\mathrm{End}\left(TM,\omega\right)\right)\ .$$

Mittels Lemma 2.3.4 sehen wir ähnlich wie im Beweis von Satz 3.2.2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{sscal}^{\nabla^t,\mathsf{J}^t}\Big|_{t=0}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega\left(\mathrm{sRic}^{\nabla^t},\mathsf{J}^t\right)\Big|_{t=0}=\omega\left(\delta^{\nabla}\zeta,\mathsf{J}\right)-\omega\left(\mathrm{sRic}^{\nabla},L\right)\ .$$

Lemma 2.2.14 und $L\mathsf{J}=-\mathsf{J}L$ liefern

$$\begin{aligned}\omega\left(\mathrm{sRic}^{\nabla},L\right)&=\frac{1}{2}\left(\omega\left(\mathrm{sRic}^{\nabla},L\right)+\omega\left(\mathrm{sRic}^{\nabla}\circ\mathsf{J},L\mathsf{J}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\omega\left(\mathrm{sRic}^{\nabla},L\right)-\omega\left(\mathsf{J}\circ\mathrm{sRic}^{\nabla},\mathsf{J}L\right)\right)\\&=0\ .\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_4\left(\mathsf{J}^t, \nabla^t\right)\Big|_{t=0} = \int_M \omega\left(\delta^\nabla \zeta, \mathsf{J}\right)\omega^{(n)} = \int_M \omega\left(\zeta, \nabla \mathsf{J}\right)\omega^{(n)} = 0\,.$$

□

Bemerkung 4.2.2 Der Wert von I_4 ist eine Invariante der symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω). Diese ist gemäß Satz 2.3.6 (vgl. auch [4]) durch

$$I_4(\mathsf{J}, \nabla) = 2\int_M \rho^\nabla \wedge \omega^{(n-1)} = 4\pi c_1(M, \omega) \cup [\omega]^{n-1}\,[M]$$

beschrieben. Dabei ist $c_1(M, \omega)$ die erste Chern-Klasse von (M, ω). □

Satz 4.2.3 *Die Abbildung $I_5 : \mathcal{B}(TM, \omega) \to \mathbb{R}$ ist konstant.*

Beweis. Sei (J^t, ∇^t) eine Kurve in $\mathcal{B}(TM, \omega)$ wie im Beweis von Satz 4.2.1. Wir benutzen die Symmetrie von ω und sehen wie im Beweis von Satz 3.2.2

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega\left(\mathrm{sRic}^{\nabla^t}, \mathsf{J}^t \circ \mathrm{sRic}^{\nabla^t}\right)\Big|_{t=0} \\
&= -\omega\left(\delta^\nabla\zeta, \mathsf{J}\circ \mathrm{sRic}^\nabla\right) + \omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla, L \circ \mathrm{sRic}^\nabla\right) - \omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla, \mathsf{J}\circ \delta^\nabla\zeta\right) \\
&= -\omega\left(\delta^\nabla\zeta, \mathsf{J}\circ \mathrm{sRic}^\nabla\right) + \omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla, L \circ \mathrm{sRic}^\nabla\right) + \omega\left(\mathsf{J}\circ \mathrm{sRic}^\nabla, \delta^\nabla\zeta\right) \\
&= \omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla, L \circ \mathrm{sRic}^\nabla\right)\,.
\end{aligned}$$

Mit einem unitären Reper $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_{2n})$ folgt wegen $L \in \Gamma\left(\mathrm{End}_-\left(TM, \omega, \mathsf{J}\right)\right)$ und unter Benutzung von Lemma 2.2.14

$$\begin{aligned}
\omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla, L \circ \mathrm{sRic}^\nabla\right) &= \sum_{i=1}^{2n} \omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla(\mathsf{e}_i), L \circ \mathrm{sRic}^\nabla(\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i)\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{2n} \omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla(\mathsf{e}_i), \mathsf{J}\circ L \circ \mathrm{sRic}^\nabla(\mathsf{e}_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla(\mathsf{J}\,\mathsf{e}_i), L \circ \mathrm{sRic}^\nabla(\mathsf{e}_i)\right) \\
&= -\omega\left(\mathrm{sRic}^\nabla, L \circ \mathrm{sRic}^\nabla\right)\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_5\left(\mathsf{J}^t, \nabla^t\right)\Big|_{t=0} = 0\,.$$

□

Satz 4.2.4 *Für jedes* $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$ *sind die kritischen Punkte des Funktionals*

$$I_{6,\mathsf{J}} := I_6\big|_{\mathcal{C}(TM,\omega,\mathsf{J})} : \mathcal{C}(TM, \omega, \mathsf{J}) \to \mathbb{R}$$

genau die $\nabla \in \mathcal{C}(TM, \omega, \mathsf{J})$ *mit* $\nabla \mathrm{sRic}^{\nabla} = 0$.

Beweis. Sei $\mathsf{J} \in \mathcal{J}(TM, \omega)$ und ∇^t eine Kurve in $\mathcal{C}(TM, \omega, \mathsf{J})$ mit

$$\nabla^0 = \nabla \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla^t\bigg|_{t=0} = \zeta \in \Omega^1\left(M, \mathrm{End}_+\left(TM, \omega, \mathsf{J}\right)\right) .$$

Dann folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_{6,\mathsf{J}}\left(\nabla^t\right)\bigg|_{t=0} &= \int_M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega\left(\mathrm{sRic}^{\nabla^t}, \mathrm{sRic}^{\nabla^t}\right)\bigg|_{t=0} \omega^{(n)} \\ &= -2\int_M \omega\left(\delta^{\nabla}\zeta, \mathrm{sRic}^{\nabla}\right)\omega^{(n)} \\ &= -2\int_M \omega\left(\zeta, \nabla\mathrm{sRic}^{\nabla}\right)\omega^{(n)} \end{aligned}$$

und Folgerung 4.1.6. □

Folgerung 4.2.5 *Die kritischen Punkte des Funktionals* $I_6 : \mathcal{B}(TM, \omega) \to \mathbb{R}$ *sind genau die* $(\mathsf{J}, \nabla) \in \mathcal{B}(TM, \omega)$ *mit* $\nabla \mathrm{sRic}^{\nabla} = 0$. □

Literaturverzeichnis

[1] V. Apostolov, T. Drăghici: *Hermitian conformal classes and almost Kähler structures on 4-manifolds.* Diff. Geom. Appl. **11**, No.2, 179–195 (1999).

[2] C. Becker: *Grundbegriffe der Theorie der Fréchet-Mannigfaltigkeiten.* Diplomarbeit, Universität Hamburg (2001).

[3] R. Berndt: *An introduction to symplectic geometry.* Graduate Studies in Mathematics, Vol.26, Providence, AMS (2001).

[4] A.L. Besse: *Einstein Manifolds.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3.Folge, Bd.10, Berlin, Springer-Verlag (1987).

[5] D.E. Blair, S. Ianus: *Critical associated metrics on symplectic manifolds.* Contemp. Math. **51** 23–29 (1986).

[6] D. Bleecker: *Gauge theory and variational principles.* Global Analysis, Pure and Applied, No.1. Reading, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1981).

[7] F. Bourgeois, M. Cahen: *A variational principle for symplectic connections.* J. Geom. Phys. **30**, No.3, 233–265 (1999).

[8] M. Cahen, S. Gutt, J. Rawnsley: *Symplectic connections with parallel Ricci tensor.* Banach Cent. Publ. 51, 31–41 (2000).

[9] M. Cahen, S. Gutt, J. Rawnsley: *Symmetric symplectic spaces with Ricci-type curvature.* Kluwer Academic Publishers. Math. Phys. Stud. 22, 81–91 (2000).

[10] M. Cahen, L.J. Schwachhöfer: *Special symplectic connections and Poisson geometry.* Lett. Math. Phys. **69**, Spec. Iss., 115–137 (2004).

[11] S.K. Donaldson: *Remarks on gauge theory, complex geometry and 4-manifold topology.* in M. Atiyah, D. Lagonitzer: *Fields medallists' lectures. 2nd ed.* New York, World Scientific (2003).

[12] J. Fricke, L. Habermann: *On the geometry of moduli spaces of symplectic structures.* Manuscr. Mat. **109**, No.4, 405–417 (2002).

[13] T. Friedrich, S. Ivanov: *Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory.* Asian J. Math. **6**, No.2, 303–335 (2002).

[14] P. Gauduchon: *Hermitian connections and Dirac operators.* Boll. Unione Mat. Ital., VII.Ser., **11**-B, No.2, Suppl., 257–288 (1997).

[15] A. Gray, L.M. Hervella: *The sixteen classes of almost-Hermitian manifolds and their linear invariants.* Ann. Mat. Pura Appl. 4.Ser. **123** 35–58 (1980).

[16] K. Habermann, L. Habermann: *Introduction to symplectic Dirac operators.* erscheint in Lect. Notes Math., Berlin, Springer-Verlag.

[17] H. Hofer, E. Zehnder: *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics.* Birkhäuser Advanced Texts, Basel, Birkhäuser (1994).

[18] D.H. Husemoller: *Fibre bundles.* 3rd ed. Graduate Texts in Mathematics 20. Berlin, Springer-Verlag (1993).

[19] S. Ivanov, G. Papadopoulos: *Vanishing theorems and string backgrounds.* Classical Quantum Gravity **18**, No.6, 1089–1110 (2001).

[20] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of differential geometry.* Vol.I, New York–London–Sydney, Interscience Publishers a division of John Wiley and Sons (1963).

[21] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of differential geometry.* Vol.II, New York–London–Sydney, Interscience Publishers a division of John Wiley and Sons (1969).

[22] A. Lichnerowicz: *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie.* Roma, Edizioni Cremonese (1962).

[23] D. McDuff, D. Salamon: *Introduction to symplectic topology.* Oxford Mathematical Monographs, Oxford, Clarendon Press (1995).

[24] A. Newlander, L. Nirenberg: *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds.* Ann. Math. **65**, 391–404 (1957).

[25] P. Tondeur: *Affine Zusammenhänge auf Mannigfaltigkeiten mit fastsymplektischer Struktur.* Comment. Math. Helv. **13**, 234–244 (1961).

[26] K. Yano: *Differential geometry on complex and almost-complex spaces.* New York, Pergamon Press (1965).